VISION 7 | Les systèmes d'équations et d'inéquations et l'optimisation

RÉVISION 7

Réactivation 1

Page 146

a. (1,5, 2,25), (1,5, 9,375), (12, 4,125) et (12, 7,875).

b. $y = \frac{15}{28}x + \frac{81}{56}$ et $y = -\frac{1}{2}x + \frac{81}{8}$.

c. $\left(\frac{243}{29}, \frac{1377}{232}\right)$, soit ($\approx$ 8,38, $\approx$ 5,94).

Réactivation 2

Page 147

a. 5 %

b. Non, car l'inclinaison doit être inférieure à 10 %.

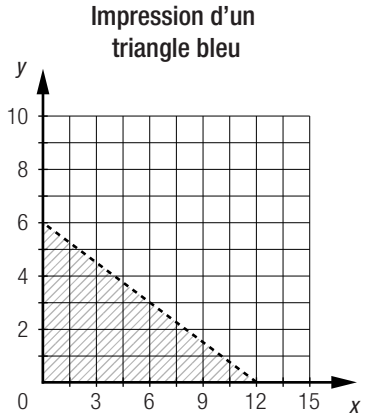
c. **1)** $x \leq 14$ **2)** 14 %

d. 16 %

Réactivation 3

Page 148

a. **1)**



2) Non, car les coordonnées de ce point ne vérifient pas l'inéquation associée à la région imprimée en bleu.

b. **1)** $y \leq -3x + 12$

2) Oui, car les coordonnées de ce point vérifient l'inéquation associée à la région imprimée en rouge.

Réactivation 4

Page 149

a. **1)** 32,076 cm^2 **2)** 82,8 cm^2

b. **1)** 53,46 cm^3 **2)** 110,4 cm^3

c. $2 \times \frac{5 \times 4{,}32 \times 2{,}97}{2} \times 5 \times \frac{1}{3} + \frac{5 \times 4{,}32 \times 2{,}97}{2} \times 6 \approx 299{,}38$ cm^3

d. $299{,}38 - 2 \times 110{,}4 = 78{,}58$

$\frac{4{,}14 \times 5 \times 8}{2} \times h = 78{,}58$

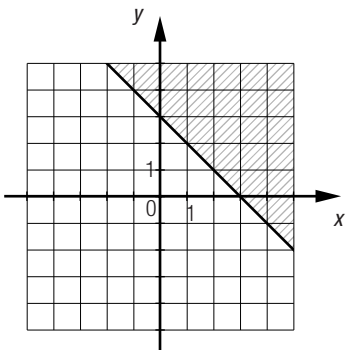
$h \approx 0{,}95$ cm

Mise à jour

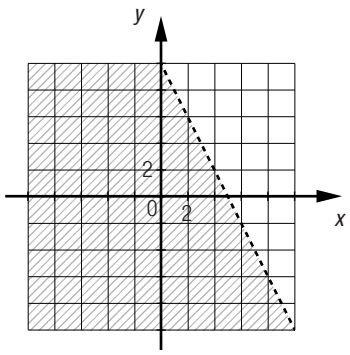
1. a) (-8, -13) **b)** (14, 33) **c)** (120, 0)
d) $\left(\frac{-32}{11}, \frac{-73}{11}\right)$ **e)** $\left(\frac{77}{48}, \frac{-3}{4}\right)$ **f)** $\left(\frac{-17}{4}, \frac{9}{4}\right)$

2. a) $x > 2$ **b)** $x \geq 22$ **c)** $x > -10$ **d)** $x < \frac{-18}{23}$ **e)** $x \leq \frac{-5}{9}$ **f)** $x \geq -21$

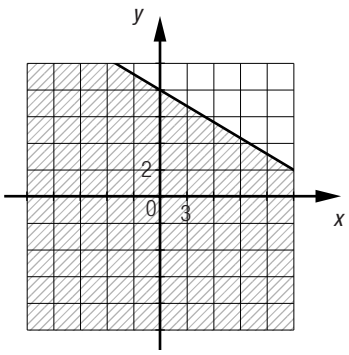
3. a)



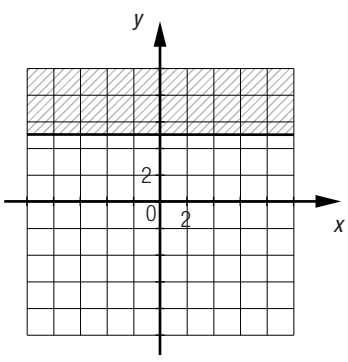
b)



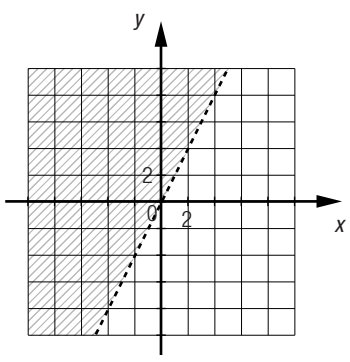
c)



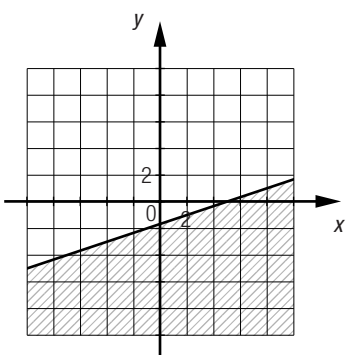
d)



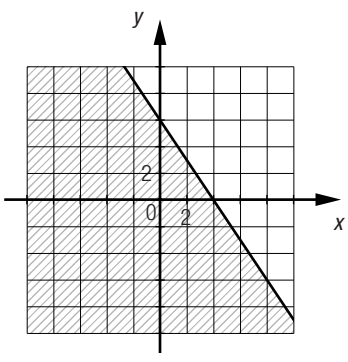
e)



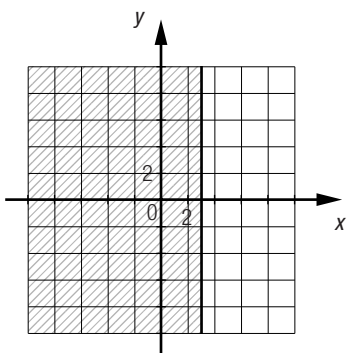
f)



g)



h)



4. a) 1) x : temps (en s)
y : hauteur (en m) d'un ascenseur
2) $y = 23 - 0{,}75x$ et $y = 2 + 0{,}5x$.
3) Les deux ascenseurs se rencontrent à une hauteur de 10,4 m à 16,8 s.

b) 1) x : temps (en s)
y : température d'un liquide (en °C)
2) $y = 0{,}1x + 40$ et $y = 0{,}3x + 20$.
3) Les deux liquides sont à la même température (50 °C) à 100 s.

c) 1) x : temps (en s)
y : distance parcourue (en m) par un mobile
2) $y = 8x + 100$ et $y = 10x$.
3) Le second mobile rattrapera le premier en 50 s.

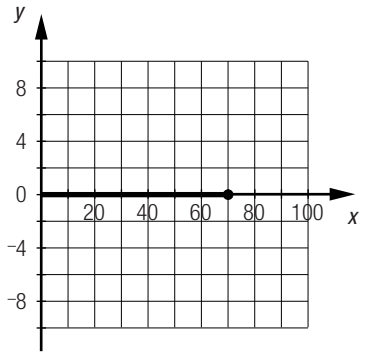
Mise à jour (*suite*)

Page 155

5. a) 1) x : un nombre

$\frac{x}{2} - 5 \leq 30$

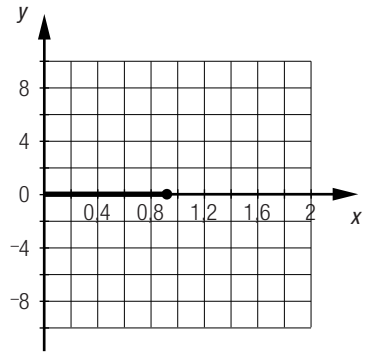
2)



b) 1) x : un nombre

$^{-}3x \geq \frac{x}{4} - 3$

2)

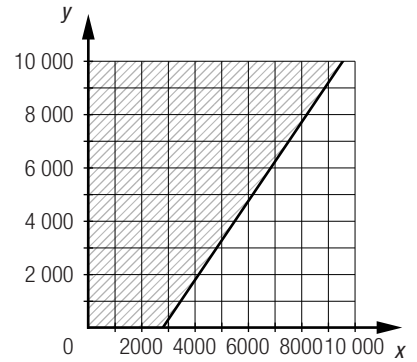


c) 1) x : salaire de Jeanne (en $)

y : salaire de Julie (en $)

$3x - 2y \leq 8500$

2)

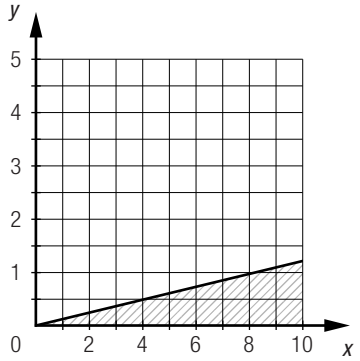


d) 1) x : vitesse d'un avion

y : vitesse d'une voiture

$x \geq 8y$

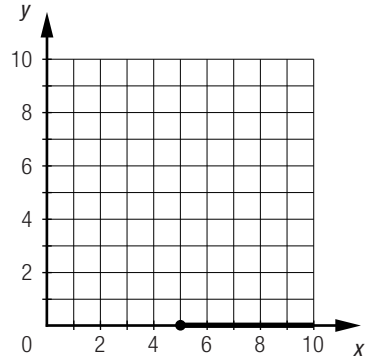
2)



e) 1) x : température ambiante (en °C)

$2x - 10 > 0$

2)

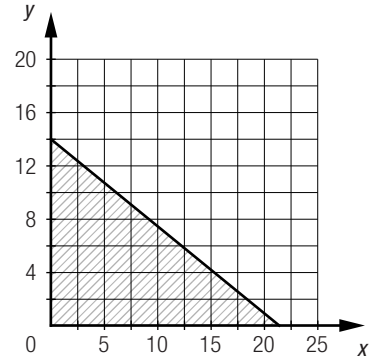


f) 1) x : nombre de tables à 4 places

y : nombre de tables à 6 places

$4x + 6y \leq 85$

2)



6. a) $y \geq \frac{2}{3}x - 30$ **b)** $y < {}^{-}5x + 0{,}2$ **c)** $y \leq {}^{-}x + 2$ **d)** $y > 100x + 150$

Mise à jour (*suite*)

Page 156

7. a) $\approx 32{,}08$ cm^2 **b)** $\approx 83{,}14$ cm^2 **c)** $\approx 46{,}92$ cm^2 **d)** $\approx 30{,}41$ cm^2 **e)** $\approx 78{,}54$ cm^2
f) $\approx 41{,}28$ cm^2 **g)** $77{,}14$ cm^2 **h)** $\approx 141{,}18$ cm^2 **i)** $\approx 29{,}47$ cm^2

8. a) $211{,}47$ cm^3 **b)** $\approx 853{,}27$ cm^3 **c)** $8{,}4$ cm^3 **d)** $\approx 523{,}60$ cm^3 **e)** $\approx 160{,}34$ cm^3
f) $54{,}6$ cm^3 **g)** $87{,}5$ cm^3 **h)** $\approx 170{,}09$ cm^3 **i)** $\approx 141{,}37$ cm^3

Mise à jour (*suite*)

Page 157

9. a) Non. Puisque l'aire latérale du cylindre oblique est supérieure à celle du cylindre droit.

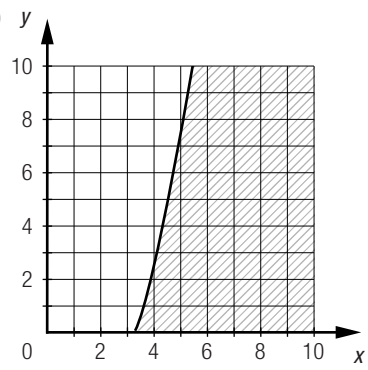
b) Oui. Pour chacun de ces cylindres, le volume correspond au produit de l'aire de la base par la hauteur. Puisque ces deux cylindres ont le même rayon, donc une base de même aire, et la même hauteur, ils ont le même volume.

10. a) Pour le volume : $440{,}5968h \geq 8812$ Pour l'aire totale : $881{,}1936 + 78{,}12h \leq 3615$

b) $\approx 20 \leq h \leq \approx 35$

11. a) $6x^2 \geq 66 + 12y$

b)



c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (4, 1), (5, 2) et (7, 3).

12. a) $\frac{4\pi r^3}{3} \geq \pi r^2 h$. En isolant r, on obtient $r \geq 0{,}75h$.

b) $\frac{4\pi r^3}{3} \leq \frac{\pi r^2 h}{3}$. En isolant r, on obtient $r \leq 0{,}25h$.

SECTION 7.1 Les systèmes d'inéquations et les polygones de contraintes

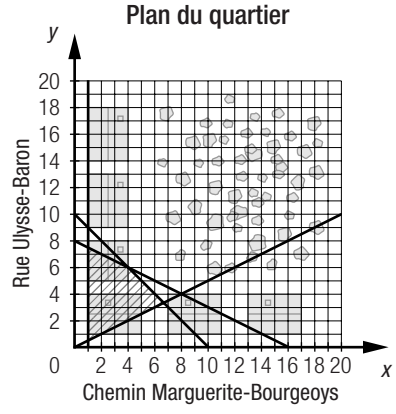
Page 158

Problème

Le sol doit être excavé dans la région commune aux régions-solutions des inéquations suivantes.

$x + 2y \leq 16$
$x + y \leq 10$
$x \leq 2y$
$x \geq 1$

Donc, le sol devrait être excavé à l'intérieur du quadrilatère représenté ci-contre.



Page 159

Activité 1

a. x : nombre d'hydroliennes à installer
y : nombre d'éoliennes à installer

b. Graphique ① : $x < \frac{1}{2}y$
Graphique ② : $x + y \leq 24$

c.

	$x < \frac{1}{2}y$	$x + y \leq 24$
A(9, 21)	**Oui**	**Non**
B(15, 15)	**Non**	**Non**
C(9, 6)	**Non**	**Oui**
D(3, 18)	**Oui**	**Oui**

d. **1)** ① et ④. **2)** ③ et ④. **3)** ④ **4)** ②

e. Non, car le couple (8, 16) ne satisfait pas les deux inéquations à la fois. Ce couple appartient à l'ensemble-solution de l'inéquation $x + y \leq 24$, mais pas à l'ensemble-solution de l'inéquation $x < \frac{1}{2}y$.

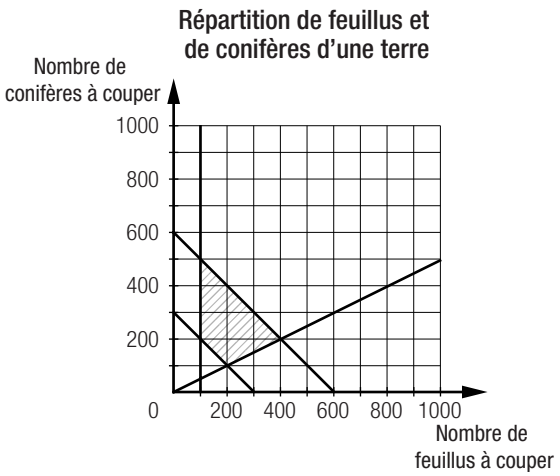
Activité 2

Page 160

a. $x \geq 100$, $x \leq 2y$, $x + y \geq 300$ et $x + y \leq 600$.

b. **1)** Le nombre de feuillus à couper doit être un nombre positif.
2) Le nombre de conifères à couper doit être un nombre positif.

c.



d. **1)** Oui. **2)** Non.

e. $y \leq 4x$, $y \geq 0{,}25x$, $x + y > 400$ et $x + y \leq 1000$.

f. $y \leq 4x$: Le nombre de conifères à couper doit être inférieur ou égal au quadruple du nombre de feuillus à couper.
$y \geq 0{,}25x$: Le nombre de conifères à couper doit être supérieur ou égal au quart du nombre de feuillus à couper.
$x + y > 400$: Le nombre total d'arbres à couper doit être supérieur à 400.
$x + y \leq 1000$: Le nombre total d'arbres à couper doit être inférieur ou égal à 1000.

g. A(80, 320), B(200, 800), C(800, 200), D(320, 80)

h. Les coordonnées des points A et D ne font pas partie de l'ensemble-solution, car elles ne vérifient pas l'inéquation $x + y > 400$. Toutefois, les coordonnées des points B et C font partie de l'ensemble-solution, car elles vérifient chacune des inéquations du système.

Technomath

Page 161

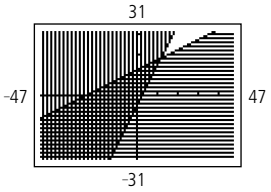
a. **1)** Le demi-plan situé au-dessus de la droite frontière doit être hachuré.
2) Le demi-plan situé au-dessous de la droite frontière doit être hachuré.

b. **1)** $y \geq 1{,}5x + 15$ **2)** $y \leq {}^{-}0{,}3x - 10$

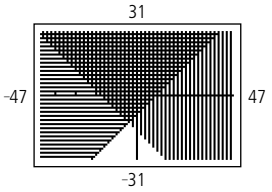
c. $y \geq x$ et $y \geq 30 - x$.

d. **1)** Le couple (11, ⁻12) n'appartient pas à l'ensemble-solution du système, car il ne vérifie aucune des inéquations :
$y \geq x \Rightarrow {}^{-}12 \geq 11$ (faux) et $y \geq 30 - x \Rightarrow {}^{-}12 \geq 19$ (faux).
2) Le couple (15, 26) appartient à l'ensemble-solution du système, car il vérifie les deux inéquations :
$y \geq x \Rightarrow 26 \geq 15$ (vrai) et $y \geq 30 - x \Rightarrow 26 \geq 15$ (vrai).

e. **1)**

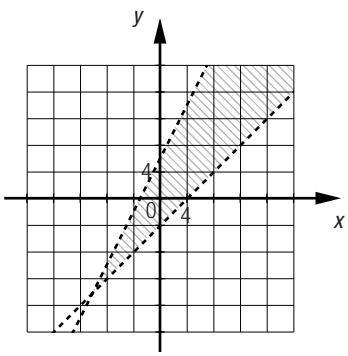


2)

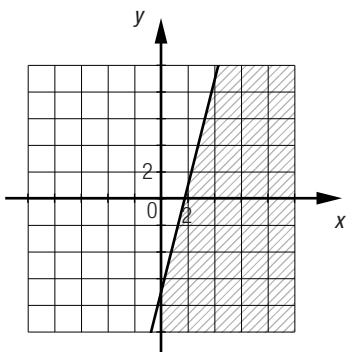


Mise au point 7.1

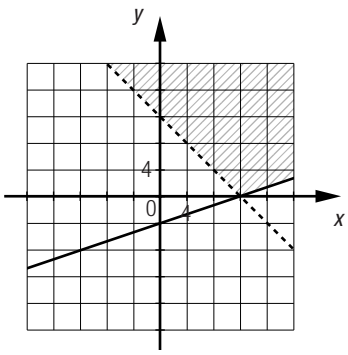
1. a)



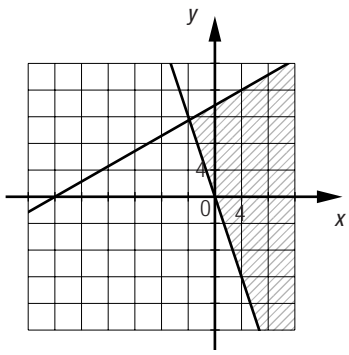
b)



c)



d)



2. a) **1)** $y < 3x - 1$ et $y \geq -\frac{1}{4}x + 2$. **2)** $y < 3x - 1$ et $y \leq -\frac{1}{4}x + 2$.

3) $y > 3x - 1$ et $y \leq -\frac{1}{4}x + 2$. **4)** $y > 3x - 1$ et $y \geq -\frac{1}{4}x + 2$.

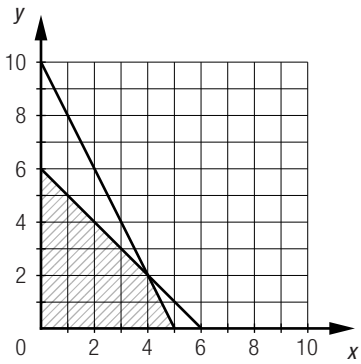
b) Non, car l'une des deux droites est tracée en pointillé.

3. a) A(0, 6), B(8, 10), C(20, 0), D(0, 4) **b)** A(0, 12), B(3, 15), C(7,5 15), D$\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$, E(0, 8)

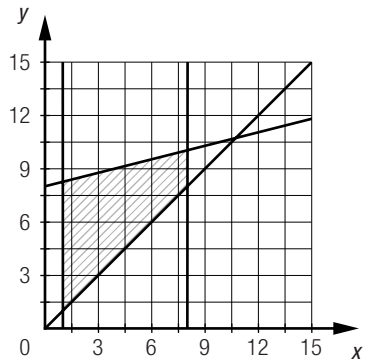
c) A(0, 8), B$\left(\frac{8}{13}, \frac{72}{13}\right)$, C(8, 0) **d)** A(0, 2), B(6, 1), C(9, 0), D(0, 0)

Mise au point 7.1 (*suite*)

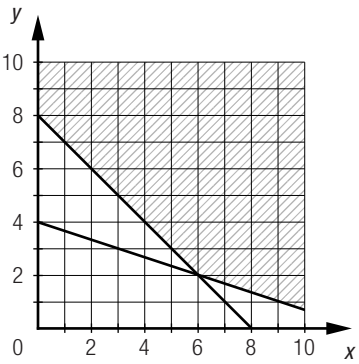
4. a)



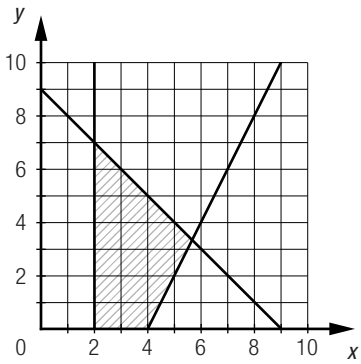
b)



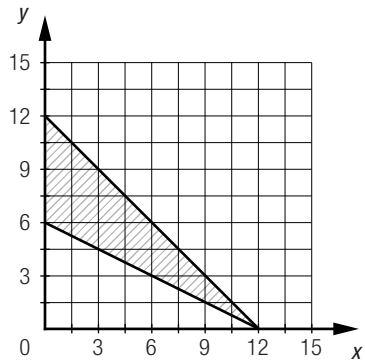
c)



d)

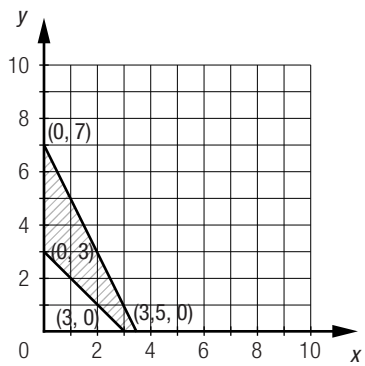


e)

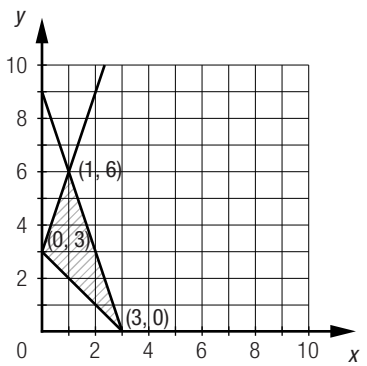


5. a) Aucun point. **b)** Aucun point. **c)** Les points D et E. **d)** Le point C. **e)** Le point E.

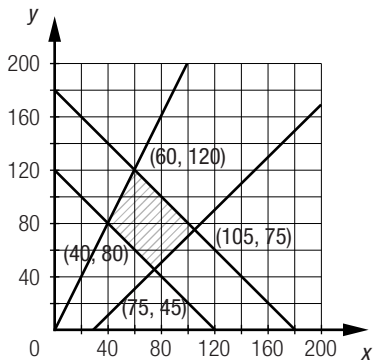
6. a)



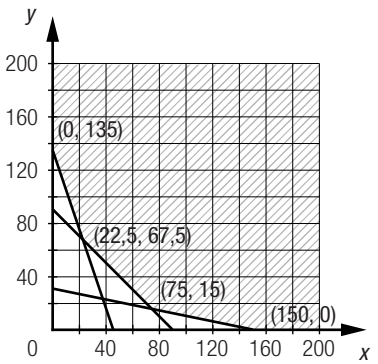
b)



c)



d)



7. a) **1)** $x \geq -3$
$y \leq 0$
$y \leq -2x - 4$
$y \geq -\frac{1}{2}x - 4$
$y > \frac{3}{2}x - 3$

2) $x \geq 0$
$y \leq 0$
$y \geq -\frac{1}{2}x - 4$
$y < \frac{3}{2}x - 3$

3) $y \geq 0$
$y < 4$
$y < \frac{3}{2}x - 3$

4) $y \leq -\frac{1}{2}x - 4$
$x \leq -3$

b) **1)** E **2)** H

8. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (5, 5), (7, 9) et (10, 15).

b) Aucun couple ne satisfait à ces conditions.

Mise au point 7.1 (*suite*)

Page 166

9. a) $x < 0$
$y \geq 3x$

b) $y \geq 0$
$x \leq 0{,}25y$

c) $x + y < 0$
$x + y > -20$

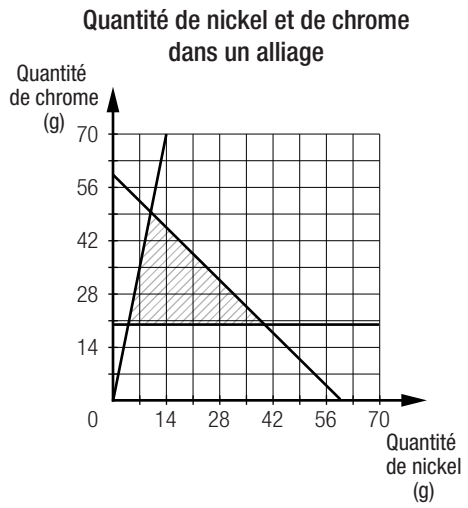
d) $x > y$
$x \leq 3y$

e) $y \geq x + 10$
$y \leq x + 25$

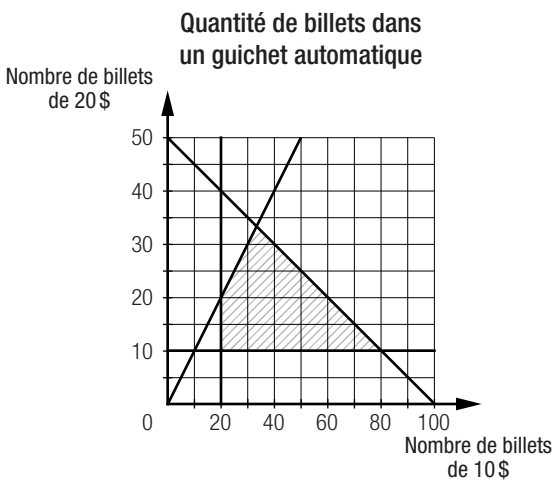
10. a) x : quantité de nickel (en g)
y : quantité de chrome (en g)
1) $y \geq 20$
2) $x + y \leq 60$
3) $5x \geq y$

b) Oui, car on ne peut pas avoir une quantité de nickel ou de chrome inférieure à 0 g.

c)



11. a)



b) 1) Non.
2) Oui.
3) Oui.
4) Non.

Mise au point 7.1 (*suite*)

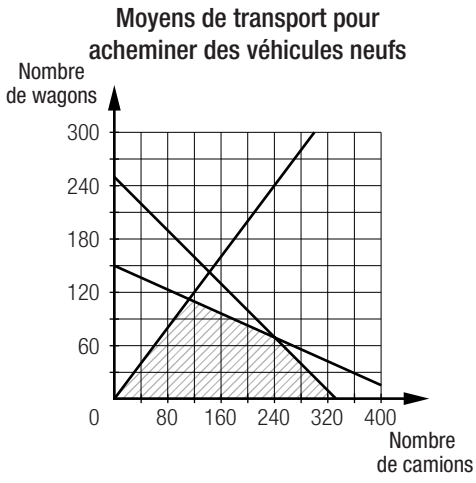
Page 167

12. a) A, D **b)** B **c)** C **d)** E

13. a) 1) x : nombre de camions
y : nombre de wagons

2) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$6x + 8y \leq 2000$
$4x + 12y \leq 1800$
$x \geq y$

3)



4) (0, 0), (112,5, 112,5), (240, 70) et $\left(\frac{1000}{3}, 0\right)$.

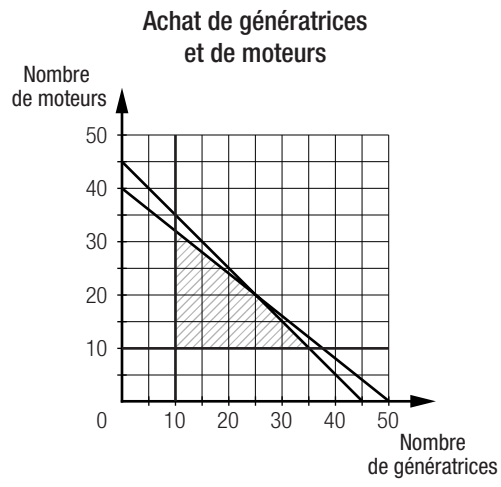
5) Seul le sommet $\left(\frac{1000}{3}, 0\right)$ ne fait pas partie de la région-solution, car ses coordonnées ne sont pas entières.

6) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (80, 60), (160, 90) et (240, 30).

b) 1) x : nombre de génératrices
y : nombre de moteurs

2) $x \geq 10$
$y \geq 10$
$2000x + 2500y \leq 100\ 000$
$x + y \leq 45$

3)



4) (10, 10), (10, 32), (25, 20) et (35, 10).

5) Tous les sommets font partie de la région-solution.

6) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (30, 12), (30, 10) et (28, 11).

Mise au point 7.1 (*suite*)

Page 168

14. a) d_1 : ⑤ ; d_2 : ④ ; d_3 : ③ ; d_4 : ① ; d_5 : ②

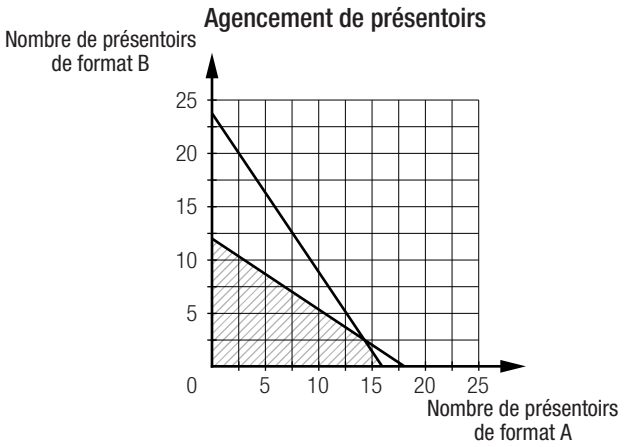
b) La contrainte ③.

c) **1)** Parce qu'elle ne devrait pas compter les solutions associées aux couples (3, 7), (4, 6) et (5, 5), puisque ces solutions ne satisfont pas à la contrainte ①.

2) 21 solutions.

15. a) **1)** $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + 2y \leq 48$
$4x + 6y \leq 72$

2)

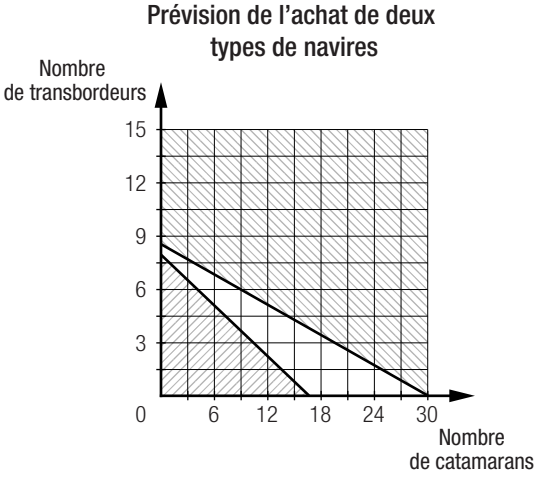


b) Non, car le couple-solution du système formé des équations $3x + 2y = 48$ et $4x + 6y = 72$ n'est pas constitué de nombres entiers.

Mise au point 7.1 (*suite*)

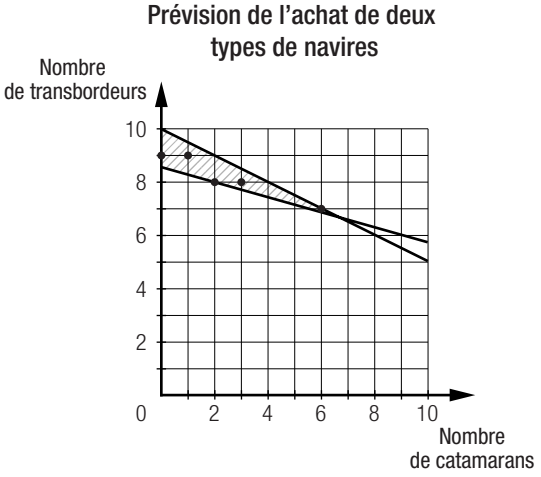
Page 169

16. a)

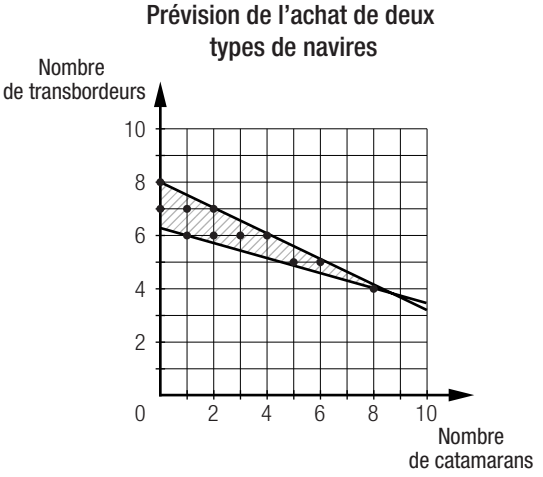


b) Non. Le système d'inéquations ne comporte aucune solution.

c) **1)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Le coût d'achat de l'ensemble des navires ne doit pas dépasser 24,75 M$.



2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
L'ensemble des navires achetés doit permettre le transport d'au moins 880 personnes.



17. a) – Le nombre de turbines solaires ne doit pas dépasser 6.
– Le nombre total de turbines doit être au maximum 8.
– Le nombre de turbines au gaz naturel doit être au maximum le double du nombre de turbines solaires.
– La somme du nombre de turbines au gaz naturel et du quart du nombre de turbines solaires est au moins 2.

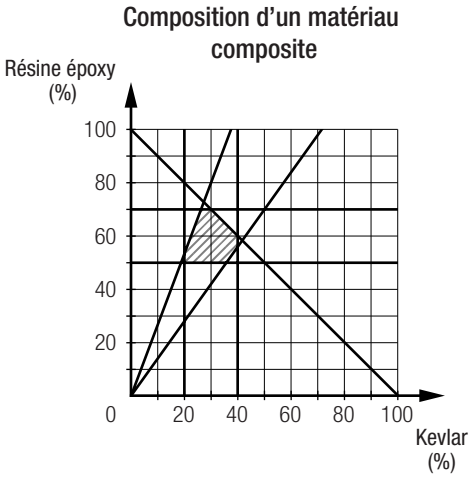
b) 1) $\frac{11}{17}$ **2)** $\frac{14}{17}$ **3)** $\frac{4}{17}$

SECTION 7.2 Objectif visé et solutions avantageuses

Problème

Page 170

En associant le pourcentage de kevlar à x et le pourcentage de résine époxy à y, nous avons les contraintes suivantes :
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 20$, $x \leq 40$, $y \geq 50$, $y \leq 70$, $x + y \leq 100$, $\frac{y}{x} \geq 1{,}4$ et $\frac{y}{x} \leq 2{,}7$.
La règle $r = 0{,}34x + 0{,}035y$ permet de calculer la rigidité r du matériau (en GPa).
Voici la représentation du polygone de contraintes et les propositions des techniciens.



Le tableau suivant indique la rigidité des matériaux composites proposés.

Proposition	Pourcentage de kevlar	Pourcentage de résine époxy	Rigidité (GPa)
①	35	63	14,105
②	27	70	11,63
③	39	52	15,08
④	37	53	14,435

À exclure, car les pourcentages ne respectent pas les contraintes.

La proposition ④ engendre le matériau le plus rigide qui respecte les contraintes. En y rajoutant 10 % de résine époxy, on obtient un matériau qui respecte encore les contraintes et dont la rigidité est de 14,785 GPa.

On peut donc créer un matériau composite encore plus rigide avec 37 % de kevlar et 63 % de résine époxy.

Activité 1

Page 171

a. 1) $C = 30x + 18y$ **2)** Non, car l'équation ne traduit pas une contrainte à respecter.

b. $x \geq 10$ $\quad x + y \geq 40$
$y \geq 0$ $\quad x + y \leq 60$
$18\,000x + 26\,000y \leq 1\,400\,000$
$y > \frac{1}{4}(x + y)$

c. **Calcul de la consommation d'essence des taxis de ce parc**

Point	Consommation (L/jour)
A(10, 35)	$30 \times 10 + 18 \times 35 = 930$
B(15, 40)	$\mathbf{30 \times 15 + 18 \times 40 = 1170}$
C(15, 20)	$\mathbf{30 \times 15 + 18 \times 20 = 810}$
D(25, 30)	$\mathbf{30 \times 25 + 18 \times 30 = 1290}$
E(30, 15)	$\mathbf{30 \times 30 + 18 \times 15 = 1170}$
F(39, 13)	$\mathbf{30 \times 39 + 18 \times 13 = 1404}$
G(45, 15)	$\mathbf{30 \times 45 + 18 \times 15 = 1620}$

d. **1)** Les couples C(15, 20), F(39, 13) et G(45, 15), car ils sont associés à des points qui n'appartiennent pas à la région-solution.

2) Le couple D(25, 30), car de tous les couples proposés qui satisfont aux contraintes, c'est celui qui engendre la plus grande consommation d'essence.

3) Le couple A(10, 35), car de tous les couples proposés qui satisfont aux contraintes, c'est celui qui engendre la plus petite consommation d'essence.

Technomath

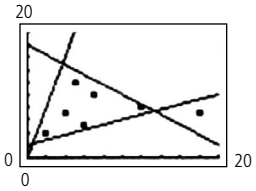
Page 172

a. $y \geq 0{,}5x$, $y \geq 20 - 3x$ et $y \leq 18 - 0{,}5x$.

b. $5x + 3y$

c. **1)** (15, 8) **2)** (5, 6)

d. **1)**



2) **i)** (12, 8) **ii)** (2, 4)

Mise au point 7.2

Page 174

1. a)

Couple	$z = 2x - 24y$
(1, 4)	**-94**
(3, 3)	**-66**
(3, 7)	**-162**
(4, 9)	**-208**
(4, 11)	**-256 (minimum)**
(5, 2)	**-38 (maximum)**
(7, 3)	**-58**

b)

Couple	$z = 5x + 2y$
(12, 24)	**108 (minimum)**
(16, 16)	**112**
(20, 28)	**156**
(24, 36)	**192**
(28, 20)	**180**
(28, 32)	**204 (maximum)**
(32, 12)	**184**

c)

Couple	$z = -x - 4{,}2y + 6$
(20, 20)	**-98 (maximum)**
(20, 70)	**-308**
(30, 40)	**-192**
(50, 60)	**-296**
(60, 30)	**-180**
(70, 20)	**-148**
(80, 70)	**-368 (minimum)**

Mise au point 7.2 (*suite*)

Page 175

2. a) **1)** x : temps (en min) consacré aux nouvelles du sport
y : temps (en min) consacré aux nouvelles nationales
$x \geq 0$, $y > 20$, $19x > y$, $4x < y$, $y \leq 35$ et $x + y \leq 75$.

2) L'objectif visé est de produire un bulletin d'informations au moindre coût.

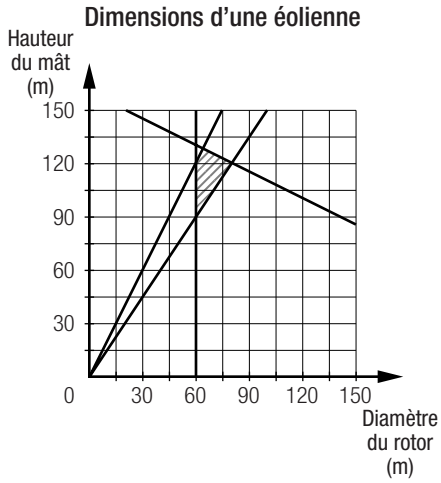
3) $z = 25x + 15y$, où z est le coût de production (en \$) d'un bulletin d'informations.

b) **1)** x : nombre d'avions de type A produits
y : nombre d'avions de type B produits
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $200x + 125y \leq 5000$, $x \geq 5 + 2y$ et $x + y \leq 30$.

2) L'objectif visé est de minimiser le temps de production des avions.

3) $z = 3x + 5y$, où z est le temps de production (en semaines) des avions.

3. a)



b) $C = 1500y + 950x$, où C représente le coût de construction (en \$).

c) **1)** La suggestion Ⓓ, pour un coût de construction minimal de 216 400 \$.
2) La suggestion Ⓒ, pour un coût de construction maximal de 256 000 \$.

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 176**

4. a) **1)** $z = 12c + 18s$, où z représente les coûts de production (en \$).
2) $r = 20c + 25s$, où r représente les revenus (en \$).
3) $p = 8c + 7s$, où p représente les profits (en \$).

b) **1)** Le point D(100, 125), avec des coûts de production de 3450 \$.
2) Le point A(75, 250), avec des revenus de 7750 \$.
3) Le point C(150, 175), avec des profits de 2425 \$.

5. a) $P = 2{,}7x + 4{,}5y$, où P représente la puissance dissipée (en W).

b) Le point A, pour une puissance dissipée minimale de 37,8 W.

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 177**

6. a) **1)** Le point E. **2)** Le point A.

b) **1)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $f(x, y) = 3x + 2y$
2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $f(x, y) = 2x - 3y$
3) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $f(x, y) = x + y$

7. a) $x \geq 75\,000$
$y \geq 25\,000$
$x \geq 2y$
$5x + 3y \leq 1\,300\,000$
$3x + 5y \leq 1\,000\,000$

b) **1)** La suggestion Ⓓ, car elle ne respecte pas une des contraintes.
2) La suggestion Ⓑ pour des revenus maximaux de 142 500 \$.

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 178**

8. a) La production de 5 chaises et de 5 tabourets maximise le revenu hebdomadaire de l'artisan.

b) La règle $r = 100x + 60y$ permet de calculer le revenu r (en \$) pour la production de x chaises et de y tabourets.
La règle $t = 7x + 4y$ permet de calculer le temps t (en h) nécessaire à la production de x chaises et de y tabourets.
La règle de la fonction à optimiser est donc $h = \frac{100x + 60y}{7x + 4y}$, où h représente le revenu horaire (en \$) de l'artisan.
La production de 3 chaises et de 8 tabourets maximise le revenu horaire de l'artisan.

9. a)
- Le côté ① est associé à « chaque millier de dollars investis en publicité permet d'augmenter les ventes d'au plus 1200 unités ».
- Le côté ② est associé à « l'investissement en publicité est d'au plus 60 k$ ».
- Le côté ③ est associé à « chaque millier de dollars investis en publicité permet d'augmenter les ventes d'au moins 600 unités ».
- Le côté ④ est associé à « l'investissement en publicité est d'au moins 30 k$ ».

b) 1) Le point D. **2)** Le point D pour un profit maximal de 248 000 $.

c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Le prix de vente pourrait être de 11 $.

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 179**

10. a) Le point A. Les coefficients a et b dans la règle étant positifs, x_1 étant inférieure à x_2 et à x_3 et y_1 étant inférieure à y_2 et à y_3, l'expression $ax_1 + by_1$ est nécessairement inférieure à $ax_2 + by_2$ et à $ax_3 + by_3$.

b) Non. Lorsqu'on compare la valeur de la fonction évaluée au point C avec celle évaluée au point B, on sait que le terme ax augmente (car l'abscisse du point C est supérieure à l'abscisse du point B) et que le terme by diminue (car l'ordonnée du point C est inférieure à l'ordonnée du point B). Ne connaissant pas l'ampleur de l'augmentation et de la diminution, on ne peut pas déduire lequel de ces points a des coordonnées qui engendrent la valeur maximale de la fonction.

11. a) 1) Le point B. **2)** Le point F.

b) 1) Le point H. **2)** Le point B.

SECTION 7.3 Optimisation à l'aide de la programmation linéaire

Problème **Page 180**

En posant x, la quantité de plastique neuf (en g), et y, la quantité de plastique recyclé (en g), les contraintes de la situation sont :

$x + y \geq 40$, $x + y \leq 60$, $0{,}04x + 0{,}07y \geq 2$, $0{,}04x + 0{,}07y \leq 3$, $y \geq 0{,}15(x + y)$ et $y \leq 0{,}4(x + y)$.

La règle $B = 0{,}9x + 0{,}5y$ permet de calculer le bilan carbone B de la sandale.

De cette règle, on déduit que :

- plus la masse de la sandale est petite, plus le bilan carbone sera faible. La solution optimale doit donc être située sur le côté du polygone associé à la masse minimale de la sandale, soit sur la droite d'équation $x + y = 40$;
- pour une masse donnée, plus la masse de plastique recyclé est élevée, plus le bilan carbone sera faible, car le plastique recyclé a un plus petit bilan carbone que le plastique neuf. La solution optimale doit donc être située sur le côté du polygone de contraintes associé au pourcentage maximal de plastique recyclé, soit sur la droite d'équation $y = 0{,}4(x + y)$.

On en déduit donc que la solution optimale se trouve à l'intersection des droites d'équations $x + y = 40$ et $y = 0{,}4(x + y)$. Les coordonnées du point d'intersection de ces droites sont (24, 16). Il faut donc utiliser 24 g de plastique neuf et 16 g de plastique recyclé.

Activité 1 **Page 181**

a. 1) Les matériaux dont la rigidité et la densité engendrent une vitesse de coupe de 75 m/min.
2) Les matériaux dont la rigidité et la densité engendrent une vitesse de coupe de 50 m/min.
3) Les matériaux dont la rigidité et la densité engendrent une vitesse de coupe de 25 m/min.
4) Les matériaux dont la rigidité et la densité engendrent une vitesse de coupe de 3 m/min.

b. Ce sont les points qui représentent la rigidité et la densité de certains matériaux qui respectent l'ensemble des contraintes et dont la vitesse de coupe est de 25 m/min.

c. $-0{,}1$

d. La vitesse de coupe diminue.

e. 1) Non, car la droite d_1 n'a aucun point commun avec le polygone de contraintes.
2) Non, car la droite d_4 n'a aucun point commun avec le polygone de contraintes.

f.

Sommet	$100 - 0{,}3x - 3y$	V
A(65, 3,25)	$100 - 0{,}3 \times 65 - 3 \times 3{,}25$	**70,75**
B(210, 10,5)	$100 - 0{,}3 \times 210 - 3 \times 10{,}5$	**5,5**
C(210, 4,2)	$100 - 0{,}3 \times 210 - 3 \times 4{,}2$	**24,4**
D(125, 2,5)	$100 - 0{,}3 \times 125 - 3 \times 2{,}5$	**55**
E(65, 2,5)	$100 - 0{,}3 \times 65 - 3 \times 2{,}5$	**73**

Activité 1 (*suite*)

Page 182

g. **1)** E(65, 2,5) **2)** B(210, 10,5)

h.

Temps de coupe (s)	$T = 10 - 0{,}02x + y$	$y = 0{,}02x + T - 10$
10	$10 = 10 - 0{,}02x + y$	$d_5 : y = \mathbf{0{,}02x}$
12	$\mathbf{12 = 10 - 0{,}02x + y}$	$d_6 : y = \mathbf{0{,}02x + 2}$
14,5	$\mathbf{14{,}5 = 10 - 0{,}02x + y}$	$d_7 : y = \mathbf{0{,}02x + 4{,}5}$
17	$\mathbf{17 = 10 - 0{,}02x + y}$	$d_8 : y = \mathbf{0{,}02x + 7}$

i. B(210, 10,5)

j. Sur le côté CD.

k. **1)** Lorsque les coordonnées d'un seul point engendrent la solution optimale, ce point est généralement un sommet du polygone de contraintes.

2) Lorsque les coordonnées de plusieurs points engendrent la solution optimale, ces points sont généralement situés sur un côté du polygone de contraintes.

Technomath

Page 183

a. (2, 4), (6, 7) et (8,2).

b. **1)** $z = x + 2y$ **2)** $^-0{,}5$ **3)** (6, 7) **4)** (2, 4)

c. *Plusieurs réponses possibles.* Il faut que B = 0,4A. Par exemple, on peut saisir A = 5 et B = 2.

d. **1)** (6, 7) **2)** (2, 4)

Mise au point 7.3

Page 186

1. a) **1)** B(20, 40) **2)** C(28, 12)

b) **1)** D(40, 30) **2)** Tous les points situés sur le côté BC.

c) **1)** C(3, 3) **2)** A(5, 9)

d) **1)** Tous les points situés sur le côté AB. **2)** C(18, 10)

2. a) Le sommet B. **b)** Le sommet B.

Mise au point 7.3 (*suite*)

Page 187

3. a) ① Le point A. ② Le point E.

b) ① 29 ② 10

4. a) Le point (1, 3). **b)** Le point (6, 6).

5. a) (80, 30) **b)** (0,27, $^-4{,}34$) **c)** (17, 3) **d)** (0,9, 0,8)

Mise au point 7.3 (*suite*)

Page 188

6. a) **1)** 59 **2)** 15 **b)** **1)** 4,02 **2)** 0,18

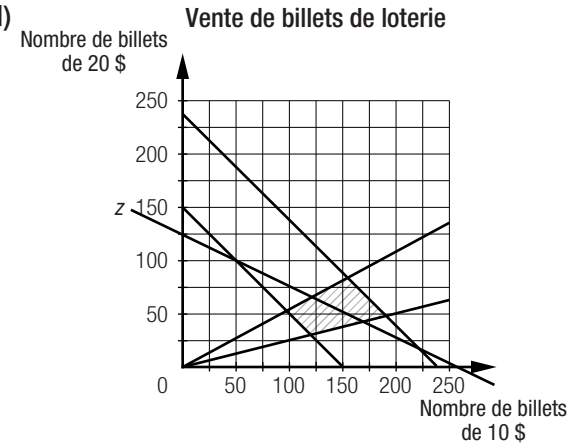
c) **1)** 43,5 **2)** 1,5 **d)** **1)** 2,8 **2)** $^-21{,}8$

7. a) x : nombre de billets de 10 $
y : nombre de billets de 20 $

b) $z = 5x + 10y$, où z représente le montant du lot à gagner (en $).

c) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \geq 150$
$x + y \leq 240$
$y \geq 0{,}2(x + y)$
$2y \leq x$

d)



e) 160 billets de 10 $ et 80 billets de 20 $ doivent être vendus.

f) 1600 $

8. a) (3, 6)

b) (2, 5)

Mise au point 7.3 (*suite*)

Page 189

9. x : nombre de vis fabriquées dans chaque atelier
y : nombre de boulons fabriqués dans chaque atelier

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + 4{,}5y \leq 10\ 800$
$6x + 4y \leq 13\ 200$

Fonction à optimiser : $P = 2(0{,}2x + 0{,}15y)$, où P représente les profits (en $).

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), (0, 2400), (1080, 1680), (2200, 0)

Cette entreprise doit produire 2160 vis et 3360 boulons pour réaliser un profit maximal de 936 $.

10. a) 1) $f \geq 0$
$c \geq 0$
$1{,}18f + 2{,}6c + 69{,}1 \geq 75$
$1{,}18f + 2{,}6c + 69{,}1 \leq 100$
$1{,}3c + 47{,}8 \geq 50$
$1{,}3c + 47{,}8 \leq 75$
$12f + 14c + 50 \geq 165$
$12f + 14c + 50 \leq 275$

2) $z = 52f + 81c + 1113$, où z représente le nombre de calories absorbées.

b) 1) Les coordonnées des sommets du polygone de contraintes sont ($\approx$ 10,38, $\approx$ 7,17), ($\approx$ 16,78, $\approx$ 1,69), ($\approx$ 7,61, $\approx$ 1,69), (0, $\approx$ 8,21) et (0, $\approx$ 11,88). Le couple ($\approx$ 7,61, $\approx$ 1,69) minimise la fonction à optimiser. Cette personne doit donc consommer quotidiennement environ 7,61 portions de fruits et environ 1,69 portion de produits céréaliers.

2) Environ 1645,61 calories absorbées.

Mise au point 7.3 (*suite*)

Page 190

11. a) Les coordonnées des sommets du polygone des contraintes sont A(500, 500), E($\approx$ 666,67, $\approx$ 333,33), B(1375, 1375), C(1875, 1125) et D(2000, 1000). Pour maximiser ses revenus, le fabricant doit produire 1875 paquets de 4 piles et 1125 paquets de 8 piles.

b) 1) Sur le côté BC associé à la droite d'équation $4x + 8y = 16\ 500$.

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Produire 1375 paquets de 4 piles et 1375 paquets de 8 piles ou produire 1875 paquets de 4 piles et 1125 paquets de 8 piles.

12. a) 1) Système d'inéquations : $x \geq 5$, $y \geq 8$
$x \leq 15$, $y \leq 25$
$x + y \leq 35$
$x \leq 0{,}4(x + y)$

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes :

$(5, 25)$, $(5, 8)$, $(10, 25)$, $(14, 21)$, $\left(\frac{16}{3}, 8\right)$

14 mg du médicament A et 21 mg du médicament B.

2) $i = 0{,}952$

b) 1) 5 comprimés du médicament A et 4 comprimés du médicament B.

2) $i = 0{,}881\ 25$

Mise au point 7.3 (*suite*) **Page 191**

13. Il faut résoudre le système formé des équations $cx + dy = m$ et $px + qy = n$.

- En isolant y dans la première équation, on obtient $y = -\frac{cx}{d} + \frac{m}{d}$
- Par la substitution, on obtient :

$$px + q\left(-\frac{cx}{d} + \frac{m}{d}\right) = n$$
$$x\left(p - \frac{qc}{d}\right) = n - \frac{qm}{d}$$
$$x = \frac{dn - qm}{dp - qc}$$

- On en déduit que :

$$y = -\frac{c}{d}\left(\frac{dn - qm}{dp - qc}\right) + \frac{m}{d} = \frac{-cdn + cmq + dmp - cmq}{d(dp - qc)} = \frac{d(mp - cn)}{d(dp - qc)} = \frac{mp - cn}{dp - qc}$$

- En substituant dans la règle de $f(x, y)$ les expressions trouvées pour x et y, on obtient la valeur optimale de $f(x, y)$.

$$f(x, y) = a\left(\frac{dn - qm}{dp - qc}\right) + b\left(\frac{mp - cn}{dp - qc}\right) = \frac{adn - aqm + bmp - bcn}{dp - qc}$$

La valeur optimale de $f(x, y)$ est $\frac{adn - aqm + bmp - bcn}{dp - qc}$.

14. x : nombre de pièces de format A
y : nombre de pièces de format B

a) Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$150x + 190y \geq 9800$
$150x + 190y \leq 13\ 600$
$13x + 22y \leq 1400$

Fonction à optimiser : $P = 47x + 65y$, où P est le profit (en \$).

Dans le polygone de contraintes, c'est le couple (40, 40) qui maximise les profits.

Le profit maximal est donc de 4480 \$.

b) Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$150x + 190y \geq 9800$
$150x + 190y \leq 13\ 600$
$47x + 65y \geq 3000$

Fonction à optimiser : $M = 13x + 22y$, où M représente les pertes de matières premières (en cm^3).

Dans le polygone de contraintes, c'est le couple (66, 0) qui minimise les pertes de matières premières.

Cette entreprise doit donc utiliser 66 pièces de format A et aucune pièce de format B.

15. a) Système d'inéquations : $x \geq 8{,}5$ $\quad x \leq 9$ $\quad y \leq 4{,}5 - 0{,}25x$
$x \geq 0$ $\quad y \geq 0$ $\quad y \geq 3{,}8 - 0{,}19x$

Fonctions à optimiser : $C_1 = 0{,}32x + 7{,}2y$ et $C_2 = 0{,}95x + 5{,}0y$, où C_1 et C_2 représentent respectivement la consommation de kérosène du premier et du deuxième avion.

Les coordonnées des sommets du polygone de contraintes sont (8,5, 2,375), (9, 2,25), (9, 2,09) et (8,5, 2,185).

La consommation minimale est de 17,928 L/km au sommet (9, 2,09) pour le premier avion et de 19 L/km à tous les points du côté formé par les sommets (9, 2,09) et (8,5, 2,185) pour le deuxième avion. Le premier avion consomme moins de kérosène dans ces conditions.

b) La consommation maximale de carburant est au sommet (8,5, 2,375). À ce sommet, le deuxième avion consomme 19,95 L/km. La quantité maximale de kérosène économisée est donc de $19{,}95 - 17{,}928 = 2{,}022$ L/km.

Problème

Page 192

Voici les règles qui permettent de calculer le pouvoir convergent de chacune des lentilles :

$C_{\text{gauche}} = \dfrac{1{,}4 - 1}{R}$

$C_{\text{droite}} = \dfrac{1{,}9 - 1}{R}$

D'après la prescription, il faut résoudre l'équation suivante :

$$C_{\text{droite}} = C_{\text{gauche}} + 2{,}3$$
$$\frac{1{,}9 - 1}{R} = \frac{1{,}4 - 1}{R} + 2{,}3$$
$$\frac{1{,}9 - 1}{R} = \frac{1{,}4 - 1}{R} + \frac{2{,}3R}{R}$$
$$\frac{0{,}9}{R} = \frac{0{,}4 + 2{,}3R}{R}$$
$$0{,}9R = 0{,}4R + 2{,}3R^2$$
$$2{,}3R^2 - 0{,}5R = 0$$
$$R(2{,}3R - 0{,}5) = 0$$

$R = 0$ m ou $R = \dfrac{0{,}5}{2{,}3}$ m, soit environ 0,2174 m ou 21,74 cm.

Le rayon de courbure des deux lentilles est environ de 21,74 cm. Le pouvoir convergent de la lentille droite est environ de 4,15 dioptries et celui de la lentille gauche est environ de 1,85 dioptrie.

Activité 1

Page 193

a. **1)** Résoudre l'équation $6000 + 40x^2 = 4080 + 640x$. Les deux populations seront égales à 4 ans et à 12 ans.
2) 6640 caribous et 6640 wapitis à 4 ans ainsi que 11 760 caribous et 11 760 wapitis à 12 ans.

b. La solution correspond aux coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

c. **1)** Environ 3,7 semaines. **2)** Environ 65 millions de sauterelles et de chenilles.

d. **1)** Environ 3,73 semaines. **2)** Environ 64,6 millions de sauterelles et de chenilles.

Population de sauterelles et de chenilles en fonction du temps

***t* (semaines)**	3,7	3,71	3,72	3,73	3,74	3,75	3,76	3,77	3,78	3,79	3,8
***s* (millions d'individus)**	**≈ 63,6**	**≈ 63,92**	**≈ 64,24**	**≈ 64,56**	**≈ 64,88**	**≈ 65,21**	**≈ 65,54**	**≈ 65,86**	**≈ 66,19**	**≈ 66,53**	**≈ 66,85**
***c* (millions d'individus)**	**≈ 64,6**	**≈ 64,61**	**≈ 64,62**	**≈ 64,64**	**≈ 64,65**	**≈ 64,67**	**≈ 64,68**	**≈ 64,69**	**≈ 64,71**	**≈ 64,72**	**≈ 64,73**

Activité 1 (*suite*)

Page 194

e. **1)** Les régions Ⓑ, Ⓒ, Ⓔ et Ⓕ. **2)** Les régions Ⓐ, Ⓑ, Ⓓ et Ⓔ. **3)** Les régions Ⓓ, Ⓔ, Ⓕ et Ⓖ.

f. La région Ⓔ.

g. Le point (4, 108) constitue un couple-solution, car les deux courbes frontières auxquelles appartient ce point font partie de la région-solution, tandis que les points (4, 225) et (25, 412,5) ne constituent pas des couples-solutions, car l'une des courbes frontières auxquelles appartiennent ces points ne fait pas partie de la région-solution.

Technomath

Page 195

a. Il y a 3 points d'intersection entre les 2 courbes.

b. ($\approx -3{,}07$, ≈ -4)

c. (1,2, ≈ −3,7)

d. **1)** (≈ 1,16, ≈ −3,74) **2)** (≈ 3,5, ≈ 7,17)

Mise au point 7.4

1. a) (0, 0) et (4, 16).

b) (≈ 1,73, ≈ 1,27)

c) (≈ −24,36, ≈ 5,18) et (≈ −1,64, ≈ −6,18).

d) (≈ −8,45, ≈ $3{,}09 \times 10^{-5}$)

2. a) **1)** 1 solution.

2) (≈ 3,3, 2,8)

b) **1)** 1 solution.

2) (≈ 1,9, ≈ 3,1)

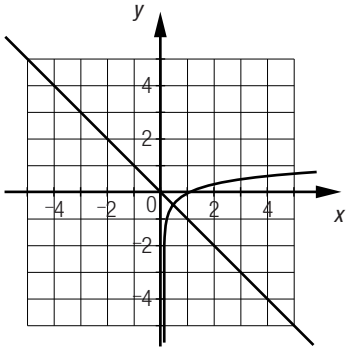
c) **1)** 2 solutions.

2) (≈ −2, ≈ −2,1) et (≈ 3,2, ≈ 1,1).

d) **1)** 2 solutions.

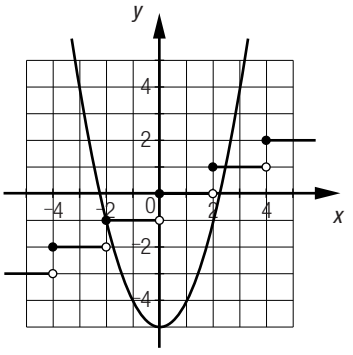
2) (≈ 2,4, ≈ 2,2) et (≈ 3,7, ≈ 3,7).

3. a) **1)** 1 solution.



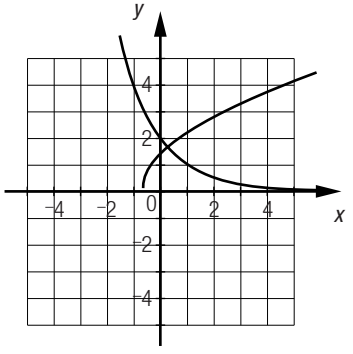
2) (≈ 0,4, ≈ −0,4)

b) **1)** 2 solutions.



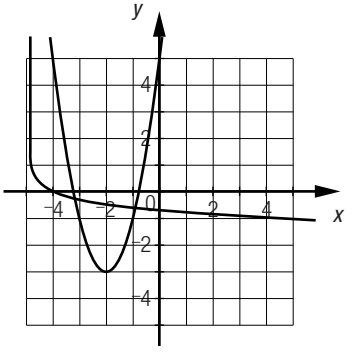
2) (≈ 2,5, 1) et (−2, −1).

c) **1)** 1 solution.



2) (≈ 0,3, ≈ 1,7)

d) **1)** 2 solutions.



2) (≈ −3,2, −0,3) et (≈ −0,9, ≈ −0,6).

Mise au point 7.4 (*suite*)

4. a)

x	1,7	1,8	1,9	4,5	4,6	4,7
$y = x^2 - 6x + 8$	0,69	0,44	0,21	1,25	1,56	1,89
$y = \ln x$	≈ 0,53	≈ 0,59	≈ 0,64	≈ 1,50	≈ 1,53	≈ 1,55

(≈ 1,8, ≈ 0,59) et (≈ 4,6, ≈ 1,53).

b)

x	3,5	3,6	3,7	3,8
$y = 0{,}4[x + 1]$	1,6	1,6	1,6	1,6
$y = 3^{x - 2{,}67} - 1{,}4$	≈ 1,09	≈ 1,38	≈ 1,7	≈ 2,06

(≈ 3,7, 1,6)

5. a) $y \leq {}^{-}x^2$
$y > {}^{-}2(0{,}8)^x$

b) $y > \frac{1}{x}$
$y \leq 2^x$

c) $y \geq x - 1$
$y \leq [x]$

d) $y \leq \log(x + 2) + 4$
$y \geq 1{,}5\sqrt{x + 3} + 1$

6. a) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $y = 2^{-x}$ et $y = \log({}^{-}x + 3) + 1$.
2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $y = 2^{-x}$ et $y = \log({}^{-}x)$.
b) Oui, à condition que les deux courbes soient tangentes l'une à l'autre.

Mise au point 7.4 (*suite*)

Page 199

7. a) 1) Les régions Ⓔ et Ⓕ. **2)** Les régions Ⓒ, Ⓖ et Ⓘ. **3)** La région Ⓐ. **4)** La région Ⓗ.
b) 1) $y \leq {}^{-}x^2 - x + 3$
$y \geq x^2 - x - 1{,}5$
$y < x$

2) $y \leq {}^{-}x^2 - x + 3$
$y \leq x^2 - x - 1{,}5$
$y > x$

3) $y \geq {}^{-}x^2 - x + 3$
$y \leq x^2 - x - 1{,}5$
$y > x$

4) $y \leq {}^{-}x^2 - x + 3$
$y < x$

8. Aucun de ces élèves n'a raison. En redéfinissant les paramètres d'affichage de la fenêtre graphique, on observe quatre points d'intersection entre ces deux fonctions. Il y a donc quatre solutions.

9. a) (2, 0) **b)** (2,2, 0,4) **c)** (2,21, 4,45)

Mise au point 7.4 (*suite*)

Page 200

10. a) Les arbres **A** et **B** auront la même taille après environ 13,81 années.
b) Les arbres **A** et **C** auront la même taille après environ 8,04 années.
c) Les arbres **B** et **C** auront la même taille après environ 10,97 années.

11. a) La région Ⓖ.
b) $d \geq 20$
$m - 5\log d + 5 \leq 0$
$m - 5\log d + 5 \geq {}^{-}10$
c) Ces étoiles sont situées à au plus 4 parsecs et leur magnitude absolue est d'au moins 10.

12. Il faut résoudre l'équation $50(0{,}5)^{\frac{t}{24}} = 100(0{,}5)^{\frac{t}{5{,}7}}$.
Ces échantillons auront la même masse dans environ 7,48 milliers d'années.

Mise au point 7.4 (*suite*)

Page 201

13. a) 1) Il faut résoudre graphiquement l'équation $\frac{25\,000}{p} = 40(1{,}01)^{p - 150}$.
Le prix d'équilibre est environ de 244 $.
2) La quantité d'équilibre est environ de 102 milliers de lecteurs numériques.
b) 1) Le prix d'équilibre augmente d'environ 48 $.
2) La quantité d'équilibre diminue d'environ 17 milliers de lecteurs numériques.

Mise au point 7.4 (*suite*)

Page 202

14. a) $y \leq {}^{-}\frac{10}{x + 3} + 6$
$y \leq \ln {}^{-}(x - 5) + 3$
$y \geq 0{,}5x^2 - 2x + 1$
b) A($\approx$ 2,1, $\approx$ 4,1), B($\approx$ 4,5, $\approx$ 2,2) et C($\approx$ ⁻0,5, $\approx$ 2).
c) 1) ($\approx$ 3,5, $\approx$ 3,4) **2)** $f(x, y) \approx 17{,}2$

15. a) Ces solutions représentent les moments où les planètes A et B se trouvent à la même distance de leur étoile.
b) Le système comporte une infinité de solutions, car les deux courbes se croisent de façon périodique, ce qui engendre une infinité de points d'intersection.
c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* ($\approx$ 8,6, $\approx$ 198,5) et ($\approx$ 13,9, $\approx$ 201,3).
d) 1) Environ 5,3 ans. **2)** Environ 14,7 ans.

SECTION 7.5 Optimisation de figures équivalentes

Page 203

Problème

Le graphique permet de déduire que, pour un périmètre donné :

- l'aire maximale du rectangle correspond à l'ordonnée du sommet de la parabole ;
- la hauteur du rectangle de plus grande aire correspond à l'abscisse du sommet ;
- l'abscisse du sommet est située à mi-chemin entre les deux abscisses à l'origine de la parabole.

La démarche ci-dessous permet de trouver les abscisses à l'origine de la parabole d'équation $A = {}^{-}h^2 + \frac{Ph}{2}$.

$^{-}h^2 + \frac{Ph}{2} = 0$

$h\left(\frac{P}{2} - h\right) = 0$

$h = 0$ ou $h = \frac{P}{2}$.

L'abscisse du sommet est donc $\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} - 0\right)$, soit $\frac{P}{4}$.

Le seul rectangle dont la hauteur est égale au quart de son périmètre est un carré.

Page 204

Activité 1

a. Aire de l'aile rose : $\frac{(1{,}5 + 0{,}5) \times 3}{2} = 3$ m^2

Aire de l'aile orange : $\frac{(1{,}5 + 0{,}5) \times 3}{2} = 3$ m^2

b. Non. Par exemple, les côtés non parallèles du trapèze rose sont plus courts que les côtés non parallèles du trapèze orange. Puisque ces deux trapèzes ont des bases isométriques, leur périmètre est différent bien qu'ils aient la même aire.

c. Périmètre de l'aile orange : $3{,}9 + 0{,}5 + 3{,}3 + 1{,}5 = 9{,}2$ m

Périmètre de l'aile verte : $2{,}4 + 1{,}5 + 1{,}5 + 3{,}8 = 9{,}2$ m

d. Non. Par exemple, le trapèze orange a le même périmètre que le triangle vert. Pourtant, l'aire du triangle vaut $\frac{2{,}4 \times 3}{2}$, soit 3,6 m^2, ce qui est plus élevé que l'aire du trapèze.

Page 205

Activité 1 (*suite*)

e. $A_{①} = 2 \times 4 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 2 \times 4 \times 8 = 160$ cm^2 $\qquad A_{②} = 6\frac{2}{3} \times 6\frac{2}{3} + 4 \times \frac{6\frac{2}{3} \times 8\frac{2}{3}}{2} = 160$ cm^2

Les deux configurations ont la même aire totale, soit 160 cm^2.

f. $V_{①} = 4 \times 4 \times 8 = 128$ cm^3 $\qquad V_{②} = \frac{6\frac{2}{3} \times 6\frac{2}{3} \times 8}{3} = \frac{3200}{27}$, soit $\approx 118{,}52$ cm^3.

Non. Le prisme régulier a un volume de 128 cm^3, tandis que la pyramide a un volume d'environ 118,52 cm^3.

g. $V_{③} = 6\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{9} \times 8 = \frac{3200}{27}$, soit $\approx 118{,}52$ cm^3.

Les deux configurations ont le même volume, soit $\frac{3200}{27} \approx 118{,}52$ cm^3.

h. $A_{③} = 2 \times 6\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{9} + 2 \times 2\frac{2}{9} \times 8 + 2 \times 6\frac{2}{3} \times 8 = \frac{4640}{27}$, soit $\approx 171{,}85$ cm^2.

Non. La pyramide régulière a une aire de 160 cm^2, tandis que le prisme droit a une aire d'environ 171,85 cm^2.

Page 206

Activité 2

a. $A_{Ⓐ} = \frac{\sqrt{3} \times 18}{2} = 9\sqrt{3}$ cm^2 $\qquad A_{Ⓑ} = \frac{2\sqrt{3} \times 9}{2} = 9\sqrt{3}$ cm^2 $\qquad A_{Ⓒ} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6}{2} = 9\sqrt{3}$ cm^2

b. $P_{Ⓐ} = 2\sqrt{18^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{3}$, soit $\approx 37{,}77$ cm. $\qquad P_{Ⓑ} = 9 + 2\sqrt{3} + \sqrt{9^2 + (2\sqrt{3})^2}$, soit $\approx 22{,}11$ cm.

$P_{Ⓒ} = 6 + 6 + 6 = 18$ cm

Le triangle Ⓒ.

c. **1)** Les dimensions de ce rectangle sont de 3 cm sur 12 cm.
2) Les dimensions de ce rectangle sont de 2 cm sur 18 cm.

d. Le périmètre diminue.

e. Non, car, graphiquement, il n'y a aucun point d'intersection.

f. Les dimensions du rectangle sont de 6 cm sur 6 cm. Le rectangle est donc un carré.

g. Parmi tous les polygones qui ont la même aire et le même nombre de côtés, le polygone régulier est celui qui a le plus petit périmètre.

Activité 2 (*suite*) **Page 207**

h. $5 \times 4 = 20$ cm^2

i. **1)** Le périmètre diminue. **2)** Cette suite de polygones tend vers un cercle.

j. $A = \pi r^2$
$20 = \pi r^2$
$r = \sqrt{\frac{20}{\pi}}$, soit $\approx 2{,}52$ cm.
$P = 2\pi r$
$P \approx 2\pi \times 2{,}52$, soit $\approx 15{,}85$ cm.

k. $V_{Ⓐ} = 3 \times 8 \times 9 = 216$ cm^3 $V_{Ⓑ} = 3 \times 6 \times 12 = 216$ cm^3 $V_{Ⓒ} = 4 \times 6 \times 9 = 216$ cm^3
$V_{Ⓓ} = 2 \times 6 \times 18 = 216$ cm^3 $V_{Ⓔ} = 6 \times 6 \times 6 = 216$ cm^3

l. $A_{Ⓐ} = 2 \times 3 \times 8 + 2 \times 3 \times 9 + 2 \times 8 \times 9 = 246$ cm^2
$A_{Ⓑ} = 2 \times 3 \times 6 + 2 \times 3 \times 12 + 2 \times 6 \times 12 = 252$ cm^2
$A_{Ⓒ} = 2 \times 4 \times 6 + 2 \times 4 \times 9 + 2 \times 6 \times 9 = 228$ cm^2
$A_{Ⓓ} = 2 \times 2 \times 6 + 2 \times 2 \times 18 + 2 \times 6 \times 18 = 312$ cm^2
$A_{Ⓔ} = 6 \times 6 \times 6 = 216$ cm^2

m. De tous les prismes droits à base rectangulaire qui ont le même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.

Activité 2 (*suite*) **Page 208**

n. $6^3 = 216$ cm^3

o. **1)** L'aire totale diminue. **2)** Cette suite de polyèdres tend vers une boule.

p. $V = \frac{4\pi r^3}{3}$
$216 = \frac{4\pi r^3}{3}$
$r = \sqrt[3]{3 \times \frac{216}{4\pi}}$, soit $\approx 3{,}72$ cm.
$A = 4\pi r^2$
$A \approx 4\pi \times 3{,}72^2$, soit $\approx 174{,}10$ cm^2.

q. $6 \times 6^2 = 216$ cm^2

r. **1)** Le volume augmente. **2)** Cette suite de polyèdres tend vers une boule.

s. $A = 4\pi r^2$
$216 = 4\pi r^2$
$r = \sqrt{\frac{216}{4\pi}}$, soit $\approx 4{,}15$ cm.
$V = \frac{4\pi r^3}{3}$
$V \approx \frac{4\pi \times 4{,}15^3}{3}$, soit 298,51 cm^3.

Technomath

Page 209

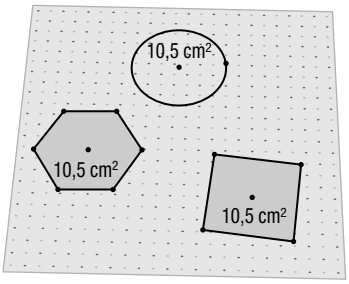
a. 1) $\approx$ 5,38 cm **2)** $\approx$ 6,07 cm **3)** Le carré, le disque et le triangle.

b. 1) $\approx$ 13,83 cm^2

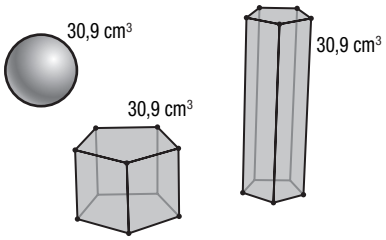
2) Le cylindre circulaire droit et le prisme droit à base triangulaire ont le même volume. Le prisme droit à base pentagonale et le prisme droit à base octogonale ont le même volume.

3) Le cylindre circulaire droit et le prisme droit à base triangulaire.

c. 1)



2)



Mise au point 7.5

Page 214

1. A F, C D, E J

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 215

2. a) F, D, H, B, C, I, G, A, E **b)** E, A, G, I, C, B, H, D, F

3. A, E, C, D, F, B

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 216

4. Le lot 3, puisque tous les lots sont des pentagones de même périmètre et que le lot 3 est le seul qui a la forme d'un pentagone régulier.

5. a) C'est l'emballage **B** qui nécessite le moins de pellicule plastique. Si x représente la mesure d'une arête d'un dé, l'emballage **A** nécessite $18x^2$ unités carrées de pellicule plastique, tandis que l'emballage **B** nécessite $16x^2$ unités carrées de pellicule plastique.

b) Il doit disposer les dés de façon à ce qu'ils forment un cube.

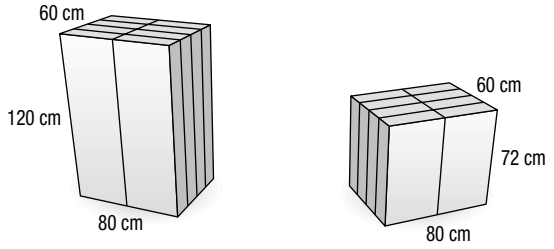
6. a) Une forme circulaire. **b)** $\frac{4}{\pi}$ km^2

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 217

7. Il faut disposer les morceaux de façon à ce que le prisme formé se rapproche le plus possible d'un cube une fois compressé.

Avant la compression **Après la compression**



L'aire de la plus petite feuille de polyéthylène est environ de 29 760 cm^2.

8. a) **1)** Disposition 4×6, disposition 3×8, disposition 2×12 et disposition 1×24.

2) Il n'y a pas de différence entre ces dispositions quant à l'espace inoccupé. L'espace inoccupé est le même dans chaque cas, soit environ 3625,91 cm^3.

b) Disposition 4×6, disposition 3×8, disposition 2×12 et disposition 1×24.

9. a) $6r^2\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$ **b)** $\frac{14\pi r^2}{3}$ **c)** $c^3\sqrt{\frac{6}{\pi}}$

d) Afin d'exprimer le rayon r du cylindre en fonction de c, il faut résoudre l'équation $2\pi r^2 + 2\pi rc = 6c^2$. On trouve ensuite que le volume du cylindre correspond à l'expression $\frac{c^3}{2}\left(\pi - \sqrt{\pi(\pi + 12)} + 6\right)$.

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 218

10. a) Le format **C.** Puisque les trois formats de contenants ont la même hauteur et la même capacité, l'aire de chaque base est égale. De toutes les figures planes équivalentes, c'est le disque qui a le plus petit périmètre, qui est ici la base du contenant de format **C.** L'aire latérale du format **C** sera plus petite que les aires des autres formats.

b) Le format **C.** Puisque de toutes les figures planes de même périmètre, c'est le disque qui a la plus grande aire, et que les trois formats de contenants ont la même hauteur, le format **C** aura un plus grand volume.

c) Le format **C.** Puisque de toutes les figures planes équivalentes, c'est le disque qui a le plus petit périmètre, et puisque l'aire latérale est la même pour tous les formats, le format **C** aura la plus grande hauteur, et donc, le plus grand volume.

11. a) La confiserie peut fabriquer 400 000 petits chocolats.

b)

	Cylindre	**Cube**	**Boule**
Volume du chocolat sans bonbon	$2,5 \div 0,8 = 3,125$ cm^3	$2,5 \div 0,8 = 3,125$ cm^3	$2,5 \div 0,8 = 3,125$ cm^3
Dimensions du chocolat sans bonbon	Hauteur : $\approx$ 3,98 cm Rayon : 0,5 cm	Arête : $\approx$ 1,46 cm	Rayon : $\approx$ 0,91 cm
Dimensions du chocolat avec bonbon	Hauteur : $\approx$ 4,18 cm Rayon : 0,6 cm	Arête : $\approx$ 1,66 cm	Rayon : $\approx$ 1,01 cm
Volume du chocolat avec bonbon	$\approx$ 4,73 cm^3	$\approx$ 4,59 cm^3	$\approx$ 4,28 cm^3
Volume de la couche de bonbon	$\approx$ 1,60 cm^3	$\approx$ 1,47 cm^3	$\approx$ 1,15 cm^3

1) On utilise environ 1,60 mL de bonbon. **2)** On utilise environ 1,47 mL de bonbon.

3) On utilise environ 1,15 mL de bonbon.

c) **1)** 380 $ **2)** 250 $

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 219

12. a) La réaction de l'ensemble ②, car, lorsqu'on compare les solides deux par deux avec ceux de la réaction de l'ensemble ① et ceux de la réaction de l'ensemble ③, ceux de la réaction de l'ensemble ② ont toujours une aire plus grande.

b) La réaction de l'ensemble ③, car, lorsqu'on compare les solides deux par deux avec ceux de la réaction de l'ensemble ① et ceux de la réaction de l'ensemble ②, ceux de la réaction de l'ensemble ③ ont toujours une aire plus petite.

13. Les coûts d'étiquetage dépendent de l'aire de l'étiquette à produire, qui est égale à l'aire latérale de la pile. Les aires latérales des modèles de piles sont les suivantes.

Volume des piles : $6 \times 1{,}5 \times 6 = 54$ cm^3

Pile A Aire latérale : $(6 + 1{,}5 + 7{,}5) \times 6 = 90$ cm^2

Pile B Aire de la base : $54 \div 6 = 9$ cm^2

Mesure d'un côté rectiligne de la base : $\left(\frac{1{,}5}{2}\right)^2\pi + 1{,}5b = 9 \Rightarrow b \approx 4{,}02$ cm

Aire latérale : $(1{,}5\pi + 2 \times 4{,}82) \times 6 \approx 86{,}14$ cm^2

Pile C Mesure d'un côté de la base : $c^2 \times 6 = 54 \Rightarrow c = 3$ cm

Aire latérale : $4 \times 3 \times 6 = 72$ cm^2

Pile D Rayon de la base : $r\pi \times 6 = 54 \Rightarrow r \approx 1{,}69$ cm

Aire latérale : $2\pi \times 1{,}69 \times 6 \approx 63{,}81$ cm^2

C'est donc le format de pile D qui coûte le moins cher à étiqueter.

RUBRIQUES PARTICULIÈRES 7

Chronique du passé

Page 221

1. a) x : nombre de fantassins

y : nombre d'artilleurs

Système d'inéquations : $x \geq 2000$, $y \geq 1000$

$y \leq x$

$x + y \geq 3500$

$x + y \leq 5000$

Fonction à optimiser : $T = \frac{6}{125}x + \frac{12}{125}y$, où T est le temps (en h).

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (2500, 2500), (4000, 1000), (2500, 1000), (2000, 1500), (2000, 2000)

2500 fantassins et 1000 artilleurs.

b) En 9 jours. **c)** 15 jours. **d)** 2500 fantassins et 2500 artilleurs.

2. a) $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$. **b) 1)** (0, 750, 375) **2)** (0, 0, 750) **3)** (375, 0, 375)

Le monde du travail

Page 223

1. x : nombre de boîtes de type A

y : nombre de boîtes de type B

Système d'inéquations : $x \geq 0$

$y \geq 0$

$0{,}05x + 0{,}08y \leq 36$

$3x + 2y \leq 1600$

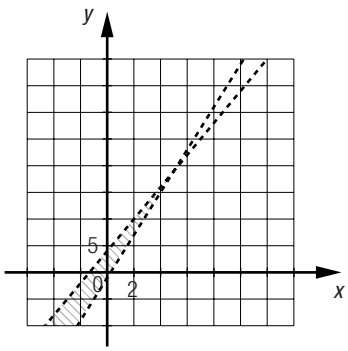
Fonction à optimiser : $V = 50x + 70y$, où V est la valeur totale des marchandises.

Les coordonnées du point qui maximise la fonction à optimiser sont (400, 200).

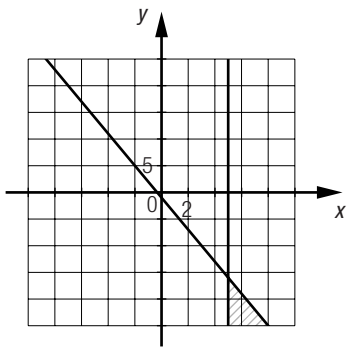
Il faudra mettre dans le camion 400 boîtes de type A et 200 boîtes de type B.

2. Après avoir percé le trou à l'origine, la perceuse devra percer les trois autres trous dans cet ordre : C, B et A.

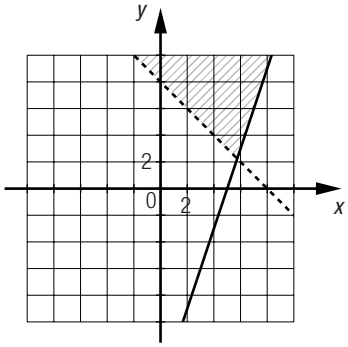
1. a)



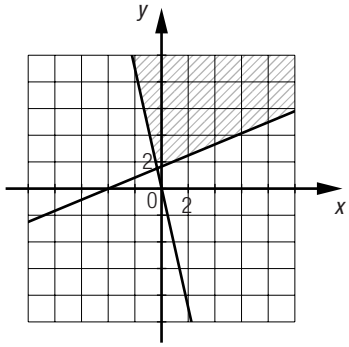
b)



c)



d)

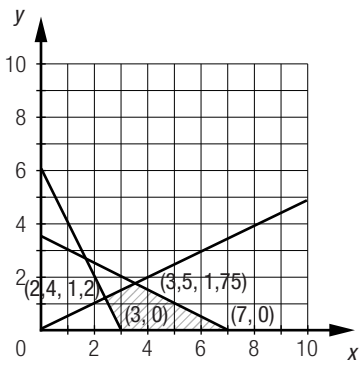


2. a) A(−1, −6) et C(3, 4). **b)** A(−1, −6) et E(1, −16). **c)** A(−1, −6)

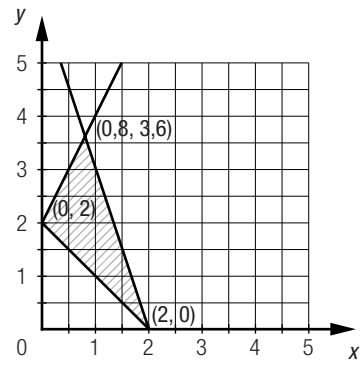
3. a) 1) x : nombre de chaises
y : nombre de tabourets en bois
$x \geq 150$, $y \geq 100$, $x \geq 2y$ et $x + y \leq 1000$.
2) $z = 20x + 12y$, où z représente le profit (en \$).

b) 1) x : nombre d'employés à temps partiel
y : nombre d'employés à temps plein
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $14x + 30y \geq 400$ et $x + y \leq 14$.
2) $z = 12x + 14y$, où z représente les dépenses (en \$).

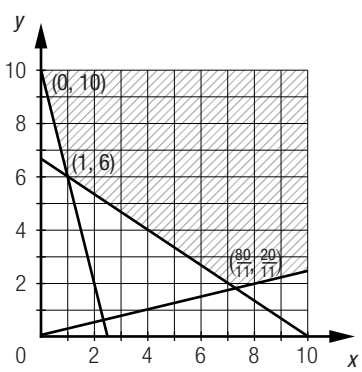
4. a)



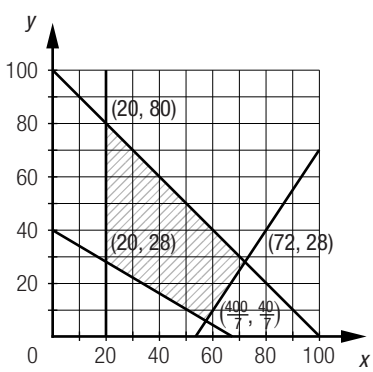
b)



c)



d)



5. a) 1) $x - y \leq -2$, $y \leq -2x + 20$, $4y \geq x - 4$ et $x + 2y > 10$. **2)** $D\left(\frac{28}{3}, \frac{4}{3}\right)$ **3)** C(6, 8) et $D\left(\frac{28}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

b) 1) $3x - y > 0$, $y \leq 18$, $y < -x + 30$, $-2x + y \geq -24$ et $x + 6y \geq 38$. **2)** D(14, 4) **3)** D(14, 4)

6.

Système d'inéquations traduisant des contraintes	$y \leq -x + 15$ $y \leq 2x - 6$ $-x + 3y \geq -60$	$x \geq 0$ $y \geq 0$ $y \leq 15$ $x \leq 14$ $y \leq 2x + 4$	$y \geq -x - 2$ $y \leq x + 4$ $y \leq -3x + 8$
Règle de la fonction à optimiser	$z = 0{,}5x + 2y$	$z = y - 3x$	$z = -10x - 14y$
Objectif visé	Maximiser	Minimiser	Maximiser
Couple-solution	**(7, 8)**	**(14, 0)**	**(5, −7)**
Valeur optimale	**19,5**	**−42**	**48**

7. a) 1) B(6, 9) **2)** 24
b) 1) D(8, 1) **2)** 26
c) 1) B(6, 9) **2)** 18,45
d) 1) C(8, 7) **2)** 24,2

8. x : nombre de bouteilles de 5 mL
y : nombre de bouteilles de 4 mL

Système d'inéquations : $5x + 4y \leq 400$
$x \geq 10$
$y \geq 5$
$y \leq 2x$
$25x + 8y \leq 250$

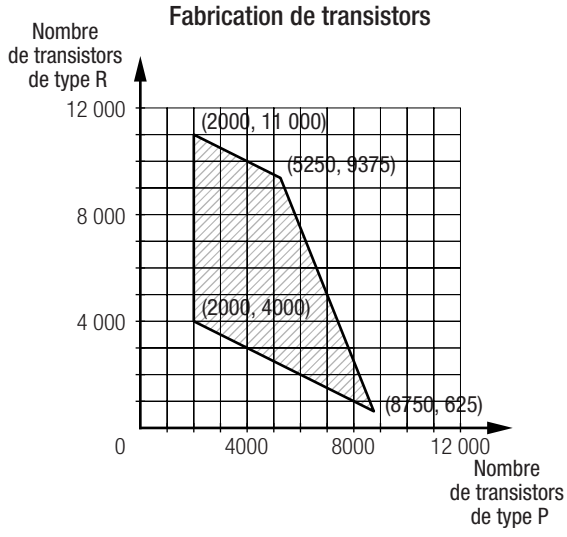
L'ensemble-solution de ce système est vide. Il est impossible de trouver un ensemble de bouteilles qui satisfait simultanément à toutes les contraintes.

9. a) x : nombre de transistors de type P
y : nombre de transistors de type R

b) $z = 0{,}05x + 0{,}05y$, où z représente les profits (en \$).

c) $x \geq 2000$
$x + 2y \geq 10\,000$
$x + 2y \leq 24\,000$
$0{,}0025x + 0{,}001y \leq 22{,}5$

d)



e) La machine doit fabriquer 5250 transistors de type P et 9375 transistors de type R.

f) 731,25 \$

10. x : nombre de billes de 1 cm de diamètre
y : nombre de billes de 2 cm de diamètre

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$7{,}8x + 31{,}2y \leq 351\,000$
$2y \leq x$
$y \geq 5000$

Fonction à optimiser : $n = x + y$, où n représente le nombre total de billes.

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (15 000, 7500), (25 000, 5000), (10 000, 5000)

Au maximum, 25 000 petites billes et 5000 grosses billes pourront être fabriquées.

11. x : volume de soluté (en mL)
y : volume de solvant (en mL)

Système d'inéquations : $x + y \leq 350$
$y \geq 10x$
$x \geq 6$
$x \leq 30$
$y \geq 0$

Fonction à optimiser : $c = 0{,}25x + 0{,}09y$, où c représente le coût de fabrication (en \$).

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (6, 344), (30, 320), (30, 300), (6, 60)

Le coût minimal de la fabrication de ce supplément vitaminique est de 6,90 \$ avec 6 mL de soluté et 60 mL de solvant.

12. x : nombre de cubes en métal
y : nombre de cubes en bois

Système d'inéquations : $x \geq 0$, $y \geq 0$
$50x + 30y \leq 2650$
$0{,}008x + 0{,}024y \leq 1$

Fonction à optimiser : $n = x + y$, où n représente le nombre total de cubes.

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), $\left(0, \frac{125}{3}\right)$, (35, 30), (53, 0)

On peut y placer 65 cubes, soit 35 cubes en métal et 30 cubes en bois.

13. **a)** Les coûts sont minimaux si le périmètre est minimal. Le terrain doit donc avoir la forme carrée et les coûts seront de 21 600 \$.

b) Les coûts sont minimaux si l'aire est minimale, c'est-à-dire si elle tend vers 0 m^2. Les coûts seront de 1800 \$.

c) Les coûts sont minimaux si le périmètre est minimal. Le terrain doit donc avoir la forme d'un disque et les coûts seront d'environ 21 326,94 \$.

d) Les coûts sont minimaux si l'aire est minimale, c'est-à-dire si elle tend vers 0 m^2. Les coûts seront de 1800 \$.

14. **a)** Il s'agit de résoudre le système formé des équations $P = 3(2)^{0{,}5t}$ et $P = 100(0{,}25)^{0{,}1t}$. En utilisant une méthode graphique avec une table de valeurs ou un outil technologique, on trouve $t \approx 7{,}23$ h.

Les deux populations sont donc égales au bout d'environ 7,23 h.

b) $P \approx 3(2)^{0{,}5(7{,}23)}$, soit environ 36,72 milliers de bactéries.

Chaque culture compte à ce moment environ 36,72 milliers de bactéries.

15. **a)** Non, car il n'y a aucun point d'intersection entre les deux courbes.

b) $h = \frac{3}{\pi r^2}$ et $h = \frac{15}{2\pi r} - r$.

c) ($\approx 0{,}43$, $\approx 5{,}06$) et ($\approx 1{,}28$, $\approx 0{,}58$).

d) **1)** En estimant les coordonnées du point de tangence d'une courbe mauve avec la courbe verte lorsque V augmente, on trouve que le cylindre a un rayon d'environ 0,84 cm et une hauteur d'environ 2 cm.

2) Le cylindre a un volume maximal d'environ 4,43 cm^3.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 229

16. a) $y \geq 0{,}5x^2 - 4x + 6$
$y \leq 0{,}8^{x-5} + 3$
$y \leq 0{,}5e^{x-2} - 2$

b) **1)** ($\approx 7{,}3$, $\approx 3{,}6$)
2) ($\approx 3{,}5$, $\approx -1{,}9$)

c) **1)** ≈ 9
2) $\approx 1{,}8$

17. a) Triangle : $q \approx 0{,}61$ Carré : $q \approx 0{,}79$ Pentagone : $q \approx 0{,}86$
Hexagone : $q \approx 0{,}91$ Décagone : $q \approx 0{,}97$

b) C'est le dodécagone, car pour deux polygones réguliers ayant le même périmètre, c'est le polygone ayant le plus de côtés qui a la plus grande aire. Le quotient isopérimétrique sera donc plus grand puisque, pour un même dénominateur, le numérateur sera plus grand.

c) Puisque, pour un même périmètre, c'est le cercle qui a la plus grande aire, on en déduit que le cercle a le plus grand quotient isopérimétrique. Or, pour le cercle, $a = \pi r^2$, $p = 2\pi r$ et $q = \frac{4\pi(\pi r^2)}{(2\pi r)^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{4\pi^2 r^2} = 1$.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 230

18. a) $2 \times 4 \times 5 = x^3$
$x = \sqrt[3]{40}$, soit $\approx 3{,}42$ cm.

b) $\frac{4\pi 4^3}{3} = \frac{\pi 4^2 h}{3}$
$h = 16$ dm
$x = \sqrt{16^2 + 4^2}$, soit $\approx 16{,}49$ dm.

c) $3\pi r^2 = \frac{\pi r^2 x}{3}$
$x = 9$ cm

d) $\frac{4\pi r^3}{3} = \pi r^2 x$
$x = \frac{4r}{3}$

19. a) Soit x, la mesure de $\overline{AB}$.

$$12\left(\frac{5x \times 3{,}19}{2}\right) + 20\left(\frac{6x \times 4{,}01}{2}\right) = 1560$$
$$336{,}3x = 1560$$
$$x \approx 4{,}64 \text{ cm}$$

Le segment AB mesure environ 4,64 cm.

b) $A = 1560$ cm^2
$4\pi r^2 = 1560$
$r \approx 11{,}14$ cm
$V = \frac{4\pi(11{,}14)^3}{3}$, soit $\approx 5793{,}76$ cm^3
Le volume d'air est environ de 5793,76 cm^3.

c) $C = 2\pi r$
$C \approx 2\pi \times 11{,}14$, soit $\approx 70{,}01$ cm.
Non, puisque sa circonférence est environ de 70,01 cm.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 231

20. $\frac{4\pi r^3}{3} = c^3$

$$c = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} r$$

$$A = 6c^2$$
$$A = 6\left(\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} r\right)^2$$
$$A = 6r^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

21. x : nombre de génératrices industrielles
y : nombre de génératrices commerciales

Système d'inéquations : $x \geq 20$
$y \geq 20$
$x \leq y + 20$
$2y \leq x + 40$

Fonction à optimiser : $p = 900x + 1200y$, où p représente les profits (en \$).

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (20, 20), (20, 30), (40, 20), (80, 60)
Le fabricant doit produire 80 génératrices industrielles et 60 génératrices commerciales.

22. x : nombre de participants recevant le médicament
y : nombre de participants recevant le placebo

Système d'inéquations : $x \geq 0$, $x \leq 220$
$y \geq 10$, $y \leq 60$
$x + y \geq 100$
$x + y \leq 250$
$x \geq 3y$

Fonction à optimiser : $n = x + y$, où n représente le nombre total de participants.

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (190, 60), (220, 30), (90, 10), (75, 25), (180, 60), (220, 10)

Tous les couples de nombres entiers associés aux coordonnées de points situés sur le segment reliant les points de coordonnées (90, 10) et (75, 25) minimisent la rémunération des participants. Par exemple, 80 participants recevront le médicament et 20 participants recevront le placebo.

Banque de problèmes

Page 232

1. L'aire du carré de la figure ① est de c^2.

L'aire du disque de la figure ① est de $\frac{\pi c^2}{4}$.

Puisque le carré de la figure ① est équivalent au disque de la figure ②, le rayon du disque de la figure ② est de $\frac{c}{\sqrt{\pi}}$. Cette mesure correspond également à la demi-diagonale du carré de la figure ②.

Un côté de ce carré mesure donc $c\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. L'aire du carré de la figure ② est de $\frac{2c^2}{\pi}$.

Le disque de la figure ① n'est donc pas équivalent au carré de la figure ②.

2. Aire, volume et coût de fabrication des piquets

L'aire totale d'un piquet **B** est environ de 114,99 cm^2.

Le volume d'un piquet **B** est environ de 50,22 cm^3.

Puisque le cylindre a la même hauteur et le même volume que le prisme et puisque le cône a la même hauteur et le même volume que la pyramide, on en déduit que :

- le disque est équivalent au pentagone ;
- le rayon du disque mesure environ 1 cm ;
- l'apothème du cône mesure environ 3,16 cm ;
- l'aire totale d'un piquet **A** est environ de 107,32 cm^2.

Le coût de fabrication :

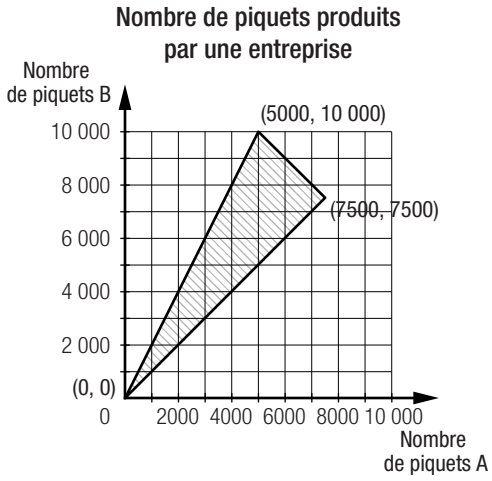
- d'un piquet **A** est environ de 0,37 \$;
- d'un piquet **B** est environ de 0,39 \$.

Optimisation de la situation

Le profit engendré par la vente d'un piquet **A** est de 1,13 \$ et celui engendré par la vente d'un piquet **B** est de 1,61 \$.

Si x représente le nombre de piquets **A** et y, le nombre de piquets **B,** la règle de la fonction à optimiser est $P = 1{,}13x + 1{,}61y$, où P est le profit total (en \$).

Voici le polygone de contraintes :

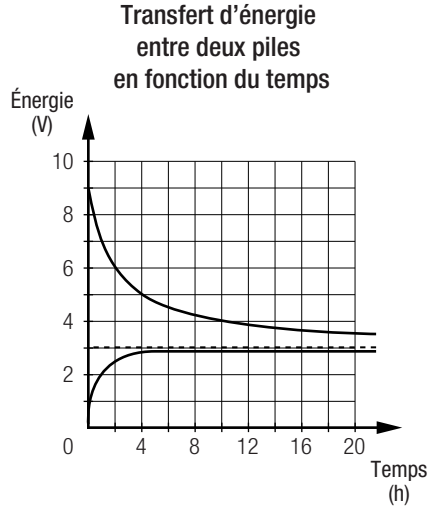


Puisque les coordonnées (7500, 7500) maximisent la fonction, l'entreprise doit produire chaque semaine 7500 piquets de chaque modèle.

Banque de problèmes (*suite*) **Page 233**

3. L'aire de la sphère est de $4\pi r^2$. La base du cylindre a le même rayon que la sphère et sa hauteur est de $2r$. Donc l'aire latérale du cylindre est de $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. Puisque l'aire de la sphère et l'aire latérale du cylindre sont égales, la projection décrite est une projection équivalente.

4. En observant la représentation graphique ci-contre et les règles de chacune des courbes, on remarque que les courbes ne se croisent pas et qu'elles ont une asymptote commune d'équation $y = 3$. C'est donc dire que l'énergie dans chacune des piles se rapprochera de plus en plus de 3 V, sans jamais atteindre cette valeur.



Banque de problèmes (*suite*) **Page 234**

5. L'aire de la spirale d'Archimède est de $\frac{\pi}{3}$ cm^2.

L'aire de la spirale de gauche en fonction de la mesure du côté c du carré est de :

$$c^2 + \frac{\pi(4c)^2}{4} + \frac{\pi(5c)^2}{4} + \frac{\pi(6c)^2}{4} + \frac{\pi(7c)^2}{4} = c^2 + \frac{126\pi c^2}{4} = c^2\left(\frac{126\pi + 4}{4}\right)$$

Pour que les aires des deux spirales soient les mêmes, il faut que :

$$c^2\left(\frac{126\pi + 4}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$c^2 = \frac{4\pi}{378\pi + 12}$$

$$\text{Aire du carré} = \frac{4\pi}{378\pi + 12}$$

6. Volume $= \frac{4}{3}\pi(75)(25)^2$, soit $\approx$ 196 349,54 m^3.

Aire $= 2\pi(75)^2 + 2\pi(75)(25)\dfrac{\arcsin\sqrt{\frac{75^2 - 25^2}{75^2}}}{\sqrt{\frac{75^2 - 25^2}{75^2}}}$, soit $\approx$ 53 848,43 m^2.

Puisque, de tous les solides équivalents, c'est la sphère qui a la plus petite aire, on cherche à ce que la forme de l'ellipsoïde se rapproche plus de celle d'une sphère. On peut donc diminuer la valeur du paramètre a ou augmenter celle du paramètre b et déterminer ensuite la valeur de l'autre paramètre.

Posons a = 70.

$\frac{4}{3}\pi(70)b^2 \approx 196\,349{,}54 \text{ m}^3 \Rightarrow b \approx 45{,}87$ m

L'aire du nouveau dirigeable est de 40 874,2 m^2.

Les valeurs des paramètres d'un nouveau dirigeable pourraient être :

a = 70 m et b $\approx$ 45,87 m.

Banque de problèmes (*suite*)

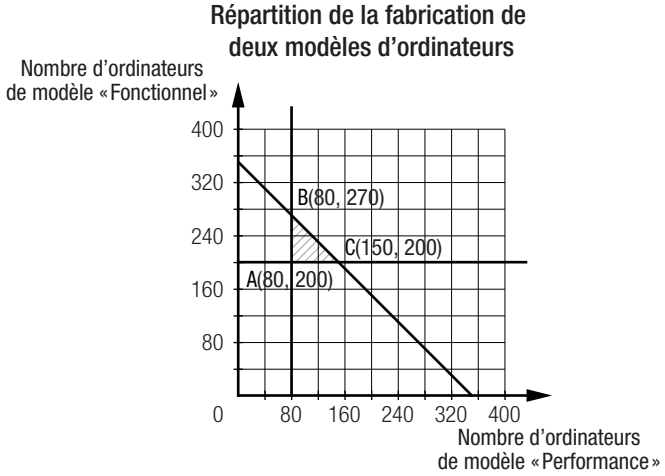
Page 235

7. Soit x le nombre d'ordinateurs de modèle « Performance » et y, le nombre d'ordinateurs de modèle « Fonctionnel », les contraintes sont :

$x \geq 80$
$y \geq 200$
$x + y \leq 350$

Les revenus R (en \$) peuvent être calculés à l'aide de la règle $R = 1000x + 850y$.

Les profits P (en \$) peuvent être calculés à l'aide de la règle $P = (1000 - c_1)x + (850 - c_2)y$.



Sommet	Revenu (\$)
A(80, 200)	250 000
B(80, 270)	309 500
C(150, 200)	320 000

Le sommet du polygone de contraintes dont les coordonnées maximisent les revenus est C(150, 200).

Pour que les profits soient maximaux au point C par rapport au point B, nous devons avoir :

$150(1000 - c_1) + 200(850 - c_2) > 80(1000 - c_1) + 270(850 - c_2)$
$150(1000 - c_1) - 80(1000 - c_1) > 270(850 - c_2) - 200(850 - c_2)$
$70(1000 - c_1) > 70(850 - c_2)$
$1000 - c_1 > 850 - c_2$
$c_1 < c_2 + 150$

8. Voici la traduction en contexte des contraintes :

$x \leq 350$	La page ne doit pas contenir plus de 350 mots.
$y \geq 10$	La page doit contenir au moins 10 éléments graphiques.
$y \geq 0{,}05x$ ou $y \geq \frac{1}{20}x$	La page doit contenir au moins un élément graphique par tranche de 20 mots.
$x + 10y \leq 750$ ou $0{,}02x + 0{,}2y \leq 15$	Le temps de chargement de la page d'accueil ne doit pas dépasser 15 s.
$x + y \geq 160$	La page doit contenir au moins 160 mots ou éléments graphiques.

Puisque le point dont les coordonnées sont (350, 40) engendre un maximum de la fonction donnée par $N = 13x + 15y$, on en déduit que l'objectif est de maximiser le nombre d'internautes qui visitent quotidiennement le site Web.