VISION 6 | Les fonctions trigonométriques

RÉVISION 6

Réactivation 1

Page 68

a. **1)** Les participants doivent parcourir $6,02 + 13,19 + 12 \approx 31,21$ km à vélo.
2) Les participants doivent parcourir $\sqrt{30}$ km, soit environ 5,48 km à la course à pied.

b. **1)** Environ 4,98 km séparent le point de ravitaillement du départ.
2) Environ 2,27 km séparent le point de ravitaillement de l'arrivée.

c. Il lui reste environ 39,29 min à vélo.

Réactivation 2

Page 69

a. **1)** 30° **2)** 60° **3)** 60° **4)** 60°

b. **1)** 100 m **2)** $100\sqrt{3}$ m **3)** 100 m **4)** 100 m

Mise à jour

Page 72

1. a) **1)** $8x = 18^2 \Rightarrow x = 40,5$ cm
2) Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

b) **1)** $13^2 = x(x + 4) \Rightarrow x \approx 11,15$ cm
2) Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.

c) **1)** $x^2 = 2,4^2 + 3,2^2 \Rightarrow x = 4$ cm
2) Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes.

d) **1)** $9^2 = 41x \Rightarrow x \approx 1,98$ cm
2) Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.

e) **1)** $x = 2 \times 5 = 10$ cm
2) Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.

f) **1)** $6^2 = x(x + 5) \Rightarrow x = 4$ cm
2) Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

2. a) m $\overline{BC} = \sqrt{21}$ cm
b) m $\overline{AB} \approx 4,74$ cm et m $\overline{AC} \approx 1,58$ cm.
c) m $\overline{AB} = 5\sqrt{3}$ cm et m $\overline{BC} = 5$ cm.
d) m $\overline{AB} = 6\sqrt{3}$ cm et m $\overline{BC} = 3\sqrt{3}$ cm.

Mise à jour (*suite*) **Page 73**

3. **Mesures des segments**

a	*b*	*c*	*m*	*n*	*h*
$\mathbf{\frac{20}{3}}$	5	$\mathbf{\frac{25}{3}}$	$\mathbf{\frac{16}{3}}$	3	**4**
$\mathbf{20\sqrt{5}}$	$\mathbf{10\sqrt{5}}$	50	40	**10**	**20**
2,5	**1,875**	**3,125**	**2**	**1,125**	1,5
18	24	**30**	**10,8**	**19,2**	**14,4**

4. Le périmètre est environ de 43,09 cm et l'aire est environ de 76,37 cm^2.

5. a) $\approx$ 315,67 cm^2 **b)** $\approx$ 74,95 cm^2 **c)** $\approx$ 167,14 cm^2 **d)** $\approx$ 65,12 cm^2

Mise à jour (*suite*) **Page 74**

6. a) $x \approx 2{,}54$ cm, $y \approx 6{,}52$ cm, $z \approx 16{,}78$ cm

b) $x = 3$ cm, $y \approx 2{,}6$ cm, $z \approx 5{,}2$ cm

c) $x \approx 6{,}24$ cm, $y \approx 9{,}99$ cm, $z = 12{,}8$ cm

d) $x = 5$ cm, $y \approx 6{,}67$ cm, $z \approx 5{,}33$ cm

e) $x \approx 9{,}75$ cm, $y \approx 16{,}31$ cm, $z \approx 8{,}37$ cm

f) $x \approx 5{,}2$ cm, $y \approx 10{,}39$ cm, $z \approx 20{,}78$ cm

g) $x = 1$ cm, $y \approx 8{,}49$ cm, $z \approx 2{,}83$ cm

h) $x \approx 5{,}42$ cm, $y \approx 2{,}08$ cm, $z = 5$ cm

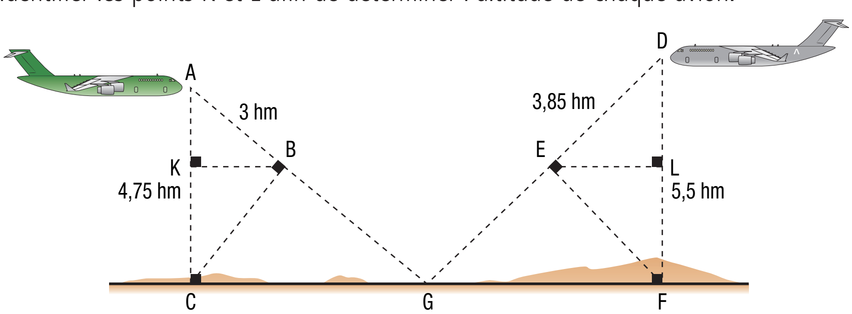
i) $x \approx 8{,}66$ cm, $y \approx 12{,}25$ cm, $z \approx 7{,}07$ cm

j) $x = 4$ cm, $y = 16$ cm, $z = 8\sqrt{5}$ cm

Mise à jour (*suite*) **Page 75**

7. La mesure de la petite diagonale est environ de 0,94 m et la mesure de la grande diagonale est environ de 1,13 m.

8. Identifier les points K et L afin de déterminer l'altitude de chaque avion.



$$\frac{\text{m } \overline{AK}}{3} = \frac{3}{4{,}75} \qquad \frac{\text{m } \overline{DL}}{3{,}85} = \frac{3{,}85}{5{,}5}$$

m $\overline{AK} \approx$ 1,89 hm m $\overline{DL}$ = 2,695 hm

Donc, m $\overline{CK} \approx$ 2,86 hm. Donc, m $\overline{FL}$ = 2,805 hm.

Lorsque les avions volent parallèlement au sol, la distance verticale entre ceux-ci est environ de 0,0503 hm, soit environ 5,03 m. Cette manœuvre de ravitaillement n'est donc pas sécuritaire.

Mise à jour (*suite*)

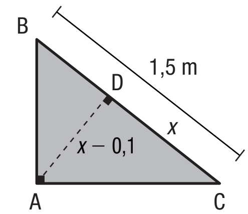
Page 76

9. Déterminer la mesure associée à x à l'aide d'une figure comme celle ci-contre.

$x \times (1{,}5 - x) = (x - 0{,}1)^2 \Rightarrow x \approx 0{,}84$ m

Volume de la pelle : $\frac{(0{,}84 - 0{,}1) \times 1{,}5}{2} \times 2 \approx 1{,}12$ m^3

Le volume maximal de terre que peut contenir cette pelle est environ de 1,12 m^3.



10. a) La distance qui sépare le sentier ① du point A est environ de 2,82 km.
La distance qui sépare le sentier ② du point B est environ de 1,73 km.
La distance qui sépare le chalet ② du point A est environ de 7,21 km.

b) La distance entre l'entrée et le point B est de $2\sqrt{3}$ km. Le chalet ① se trouve à environ 4,87 km du point A.
Le sentier ① mesure environ 5,98 km et le sentier ② mesure 4 km.
Donc, la longueur totale des trois sentiers pédestres est environ de 17,48 km.

11. a) $\approx$ 46,95 m **b)** $\approx$ 57,77 m **c)** $\approx$ 10,82 m **d)** $\approx$ 27,73 m

SECTION 6.1 Le cercle trigonométrique

Problème

Page 77

$\frac{2}{2\pi \times 2} = \frac{m \angle AOB}{360°} \Rightarrow m \angle AOB \approx 57{,}3°$

Coordonnées du point B : $(2\cos 57{,}3°, 2\sin 57{,}3°)$

Les coordonnées du détecteur situé au point B sont $(\approx 1{,}08, \approx 1{,}68)$.

Activité 1

Page 78

a. 1) 360° **2)** $2\pi r$ unités.

b. 1) 2π fois. **2)** $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

c. La mesure de l'arc est égale à la mesure du rayon.

d. 1) 2π rad **2)** π rad **3)** $\frac{\pi}{2}$ rad **4)** $\frac{n\pi}{180}$ rad

e. 1) La longueur de l'arc est la même que celle du rayon. **2)** La longueur de l'arc est le double de celle du rayon.
3) La longueur de l'arc est 4,5 fois celle du rayon. **4)** La longueur de l'arc est 8,71 fois celle du rayon.

f. $L = r\theta$

Activité 2

Page 79

a. 1) (1, 0) **2)** (0, 1) **3)** (−1, 0) **4)** (0, −1)

b. 1) Le triangle BOP_5 est isocèle et rectangle. **2)** $\frac{\pi}{4}$ rad

c. Soit $m\,\overline{OB} = m\,\overline{BP_5} = x$.

Les coordonnées du point P_5 sont donc (x, x).

Par la relation de Pythagore, on a $x^2 + x^2 = 1^2$.

Donc, $2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Puisque le point P_5 est situé dans le 1er quadrant, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc les coordonnées du point P_5 sont $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d. 1) $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **2)** $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ **3)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

e. **1)** Le triangle BOP_9 est rectangle et a un angle de 30°.

2) $\frac{\pi}{6}$ rad

f. **1)** Dans un triangle rectangle ayant un angle de 30°, la mesure du côté opposé à l'angle de 30° est égale à la moitié de la mesure de l'hypoténuse.

2) $x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$, où x représente la mesure de $\overline{OB}$.

$$x^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$x^2 = 1 - \frac{1}{4}$$
$$x^2 = \frac{3}{4}$$
$$x = ^{\pm}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Puisque le point P_9 est situé dans le 1er quadrant, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

g. **1)** $\left(\frac{^-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **2)** $\left(\frac{^-\sqrt{3}}{2}, \frac{^-1}{2}\right)$ **3)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{^-1}{2}\right)$

Activité 2 (*suite*)

Page 80

h. **1)** Le triangle BOP_{13} est rectangle et a un angle de 30°.

2) $\frac{\pi}{3}$ rad

i. **1)** Dans un triangle rectangle ayant un angle de 30°, la mesure du côté opposé à l'angle de 30° est égale à la moitié de la mesure de l'hypoténuse.

2) $y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$, où y représente la mesure de $\overline{BP_{13}}$.

$$y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$y^2 = 1 - \frac{1}{4}$$
$$y^2 = \frac{3}{4}$$
$$y = ^{\pm}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Puisque le point P_{13} est situé dans le 1er quadrant, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

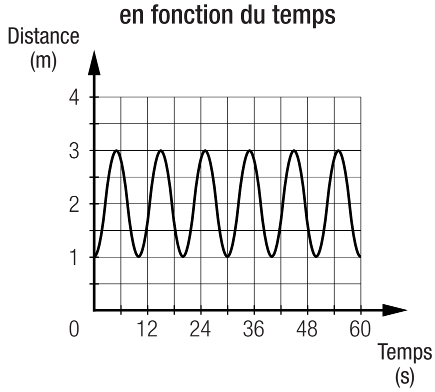
j. **1)** $\left(\frac{^-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **2)** $\left(\frac{^-1}{2}, \frac{^-\sqrt{3}}{2}\right)$ **3)** $\left(\frac{1}{2}, \frac{^-\sqrt{3}}{2}\right)$

k. **1)** Le cosinus. **2)** Le sinus.

Activité 3

Page 81

a. **Distance qui sépare l'extrémité de l'agitateur d'avec le sol en fonction du temps**



b. Domaine : [0, 60] s ; codomaine : [1, 3] m.

c. L'extrémité de l'agitateur est située au point le plus rapproché du sol à : 0 s, 10 s, 20 s, 30 s, 40 s, 50 s, 60 s, 70 s, 80 s, 90 s, 100 s, 110 s, 120 s, 130 s, 140 s, 150 s, 160 s, 170 s, 180 s, 190 s, 200 s, 210 s, 220 s, 230 s et 240 s.

Technomath

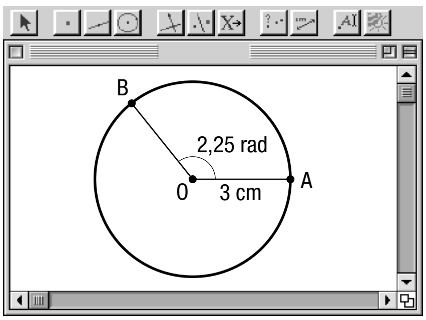
Page 82

a. **1)** m $\angle$ AOB = 1 rad à l'écran **1** et m $\angle$ AOB = 1 rad à l'écran **2.**
2) m $\angle$ AOB ≈ 57,3° à l'écran **1** et m $\angle$ AOB ≈ 57,3° à l'écran **2.**

b. Cette mesure est de 1 rad.

c. **1)** m $\angle$ AOB ≈ 68,75° à l'écran **3** et m $\angle$ AOB ≈ 166,16° à l'écran **4.**
2) La longueur de l'arc AB est de 3,192 cm à l'écran **3** et de 5,568 cm à l'écran **4.**

d. **1)**



2) La longueur de l'arc intercepté est de 6,75 cm.

Mise au point 6.1

Page 86

1. **a)** $\frac{5\pi}{3}$ rad **b)** $\frac{\pi}{12}$ rad **c)** $\frac{13\pi}{18}$ rad **d)** $\frac{\pi}{18}$ rad
e) $\frac{\pi}{4}$ rad **f)** $\frac{2\pi}{9}$ rad **g)** $\frac{-\pi}{9}$ rad **h)** $\frac{-13\pi}{18}$ rad

2. **a)** 150° **b)** 300° **c)** 126° **d)** $\left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ}$
e) $\left(\frac{990}{\pi}\right)^{\circ}$ **f)** $\left(\frac{-360}{7}\right)^{\circ}$ **g)** $\left(\frac{-540}{\pi}\right)^{\circ}$ **h)** $\left(\frac{90}{\pi}\right)^{\circ}$

3. **a)** 3 u **b)** $\frac{\pi}{4}$ u **c)** 2π u **d)** $0{,}5\pi$ u **e)** $\frac{\pi^2}{18}$ u **f)** 4,5 u

4. **a)** Dans le 2e quadrant. **b)** Dans le 1er quadrant. **c)** Dans le 4e quadrant.
d) Dans le 3e quadrant. **e)** Dans le 2e quadrant. **f)** Dans le 1er quadrant.
g) Dans le 4e quadrant. **h)** Dans le 2e quadrant.

5. **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **d)** 1 **e)** 0 **f)** $\sqrt{3}$

6. **a)** $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **b)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **c)** (≈ −0,99, ≈ 0,14)
d) (−1, 0) **e)** (≈ −0,15, ≈ −0,99) **f)** (0, 1)

Mise au point 6.1 (*suite*)

Page 87

7. A 5, B 1, C 2, D 6, E 4, F 3

Mise au point 6.1 (*suite*)

Page 88

8. **a)** Oui. π rad **b)** Oui. $\frac{\pi}{3}$ rad **c)** Non.
d) Non. **e)** Oui. ≈ 0,64 rad **f)** Oui. ≈ 2,21 rad

9. **a)** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** 0 **c)** $\pm\frac{1}{2}$ **d)** $\pm\frac{\sqrt{35}}{6}$ **e)** $\pm\frac{\sqrt{21}}{5}$ **f)** $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

10. a) $\frac{2\pi}{3}$ rad **b)** $\frac{3\pi}{4}$ rad **c)** $\approx$ 1,45 rad **d)** $\approx$ 2,06 rad

11. a) $(a, {}^-b)$ **b)** $({}^-a, {}^-b)$ **c)** $(a, {}^-b)$ **d)** $({}^-a, {}^-b)$ **e)** $({}^-a, {}^-b)$ **f)** $(a, {}^-b)$

12. a) 1) Maximum : 1 **2)** Minimum : ⁻1 **3)** Période : 2π
b) 1) Maximum : 1 **2)** Minimum : ⁻1 **3)** Période : 2π

Mise au point 6.1 (*suite*) **Page 89**

13.

L	r	θ
$\mathbf{\frac{3\pi}{5}}$	3	$\frac{\pi}{5}$
5	$\mathbf{\frac{10}{3}}$	1,5
10	5	**2**
20	8	2,5
4,9	$\mathbf{\frac{49}{40}}$	4
21	2	**10,5**

14. La mesure totale de l'angle au centre engendré par la rotation de la roue est environ de 587,74 rad. Le périmètre de ce terrain est donc environ de 587,74 m.

15. Le rayon minimal d'un tore de Stanford est de $9{,}81\left(\frac{30}{\pi\left(\frac{6}{\pi}\right)}\right)^2 = 245{,}25$ m.

Mise au point 6.1 (*suite*) **Page 90**

16. a) Une éprouvette située sur le pourtour de la centrifugeuse parcourt une distance d'environ 1 570 796,33 cm.

b) 1) La vitesse de rotation est de 5000π rad/min.
2) La vitesse de rotation est de 5000π rad/min.
3) La vitesse de rotation est de 5000π rad/min.

c) La vitesse de rotation d'une éprouvette située à *x* cm du centre de cette centrifugeuse est directement proportionnelle à la mesure du rayon.

17. a) 1) L'angle de rotation engendré est de 48π rad. **2)** L'angle de rotation engendré est de 56π rad.
b) 1) La vitesse de la personne B est environ de 0,29 rad/s. **2)** La vitesse de la personne B est environ de 2,33 m/s.

18. a) L'angle de $0{,}2\pi$ rad correspond à un angle de 36°. Par la loi des cosinus, la mesure de la façade de cet immeuble est environ de 12,98 m.

b) L'angle de rotation que doit effectuer l'instrument de mesure est de 0,19 rad.

Mise au point 6.1 (*suite*) **Page 91**

19. a) Le rayon moyen de l'orbite de la SSI est de $6371 + 347 = 6718$ km.

b) 1) La SSI se déplace à environ 0,0012 rad/s.
2) La SSI se déplace à environ 7730,85 m/s.
3) La SSI se déplace à environ 27 831,06 km/h.

20. m $\overline{AB} \approx$ 639,16 km
m $\overline{EB} \approx$ 639,16 km
m $\overline{BC} \approx$ 218,13 km
m $\overline{BD} \approx$ 218,13 km
m $\overset{\frown}{CD} \approx$ 543,06 km
La sonde spatiale a donc parcouru environ 2257,64 km.

21. La vitesse de rotation du tambour B est de $3{,}2 \times \frac{3}{2} = 4{,}8$ rad/s.

SECTION 6.2 | Les fonctions trigonométriques

Problème

Page 92

La température sera à la baisse généralement de 4 °C de 16 h 15 à 16 h 18 min 20 s, de 16 h 21 min 40 s à 16 h 25 et de 16 h 28 min 20 s à 16 h 30, et elle sera à la hausse de 4 °C de 16 h 18 min 20 s à 16 h 21 min 40 s et de 16 h 25 à 16 h 28 min 20 s.

Activité 1

Page 93

a. **1)** 2π rad **2)** π rad **3)** $\frac{\pi}{2}$ rad **4)** $\frac{\pi}{4}$ rad

b. **1)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **2)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **3)** $(0, 1)$ **4)** $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5) $(-1, 0)$ **6)** $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ **7)** $(0, -1)$ **8)** $(1, 0)$

c. **1)** $f(x) = \sin x$, où x est l'angle de rotation du balancier. **2)** $f(x) = \cos x$, où x est l'angle de rotation du balancier.

d. Une translation horizontale de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche ou vers la droite, selon la courbe qui est considérée comme la courbe initiale.

Activité 2

Page 94

a. **1)** La concentration maximale de monoxyde de carbone est de 18 ppm.
2) La concentration minimale de monoxyde de carbone est de 12 ppm.
3) La concentration moyenne de monoxyde de carbone est de 15 ppm.

b. La concentration de monoxyde de carbone passe de 12 ppm à 18 ppm en 10 jours.

c. La concentration de monoxyde de carbone est à la baisse de la 5^{e} à la 15^{e} journée, de la 25^{e} à la 35^{e} journée et de la 45^{e} à la 50^{e} journée.

Activité 2 (*suite*)

Page 95

d. **1)** 3 **2)** $0{,}1\pi$ **3)** 5 **4)** 15

e. **1)** La valeur de l'expression et celle du paramètre a sont les mêmes, soit 3.
2) La valeur de l'expression et celle du paramètre b sont les mêmes, soit $0{,}1\pi$.
3) Ce sont les coordonnées d'un point associé à un extremum de la fonction représentée par cette courbe.

f. Dans un cas, on utilise un cosinus, tandis que dans l'autre, on utilise un sinus. Les paramètres sont identiques, à l'exception du paramètre h.

g. Les valeurs des paramètres a, b et k sont identiques pour les deux fonctions, et la valeur du paramètre h est différente : elle est de 5 pour la fonction *f*, alors qu'elle est de 0 pour la fonction *g*.

Activité 3

Page 96

a. **1)** Les zéros de la fonction sinus coïncident avec des sommets de la fonction cosinus.
2) Les zéros de la fonction sinus coïncident avec ceux de la fonction tangente.

b. **1)** Aux zéros. **2)** Aux sommets.

c. **1)** La fonction tangente n'est pas définie pour les valeurs de x qui correspondent à des zéros de la fonction cosinus.
2) La période de la fonction tangente est la moitié de celle de la fonction cosinus.

d. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
tan x	0	1	n. d.	−1	0
$\frac{\sin x}{\cos x}$	0	1	n. d.	−1	0

e. Les zéros de la fonction cosinus.

Technomath

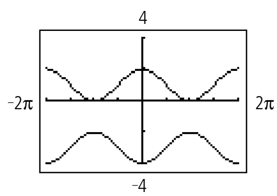
Page 97

a. **1)** Le paramètre h. **2)** Le paramètre k.

b. **1)** L'une des courbes a subi une translation horizontale par rapport à l'autre.
2) L'une des courbes a subi une translation verticale par rapport à l'autre.

c. **1)** (h, k) = (2,5π, 1) à l'écran **5** et (h, k) = (0,5π, 1) à l'écran **7.** Les deux points ont la même ordonnée, mais leur abscisse diffère par 2π.
2) Les deux courbes sont identiques.

d. **1)**



2) Par rapport à la courbe associée à Y1, la courbe associée à Y2 est translatée de π unités vers la gauche et de 4 unités vers le bas.
3) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3$

Mise au point 6.2

Page 102

1.

	Règle	Amplitude	Période	Maximum	Minimum
a)	$f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4$	**2**	**2π**	**6**	**2**
b)	$f(x) = 5\cos\pi(x + 1) - 2$	**5**	**2**	**3**	**−7**
c)	$f(x) = -1{,}5\sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 4$	**1,5**	$\mathbf{\frac{2\pi}{3}}$	**5,5**	**2,5**
d)	$f(x) = -4\cos\frac{\pi}{5}(x + 2) + 2{,}5$	**4**	**10**	**6,5**	**−1,5**

2. a) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : [−6, 0].
2) Minimum : −6 ; maximum : 0.
3) Croissante : $\left[0 + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$; décroissante : $\left[\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$.
4) Période : π

b) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : [0, 8].
2) Minimum : 0 ; maximum : 8.
3) Croissante : $[0{,}5 + 2n, 1{,}5 + 2n]$, où $n \in \mathbb{Z}$; décroissante : $[1{,}5 + 2n, 2{,}5 + 2n]$, où $n \in \mathbb{Z}$.
4) Période : 2

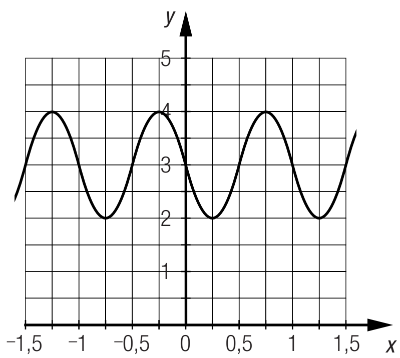
c) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : [−8, −4].
2) Minimum : −8 ; maximum : −4.
3) Croissante : $\left[\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}n, \frac{11\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$; décroissante : $\left[\frac{11\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}n, \frac{19\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$.
4) Période : $\frac{4\pi}{3}$

d) **1)** Domaine : $\mathbb{R}/\{-1 + 6n\}$, où $n \in \mathbb{Z}$; codomaine : $\mathbb{R}$.
2) Aucun extremum.
3) Croissante sur son domaine.
4) Période : 6

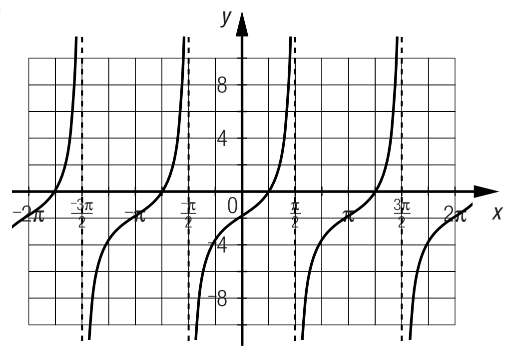
e) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : [⁻1, 7].
2) Minimum : ⁻1 ; maximum : 7.
3) Croissante : $[1 + 4n, 3 + 4n]$, où $n \in \mathbb{Z}$; décroissante : $[^-1 + 4n, 1 + 4n]$, où $n \in \mathbb{Z}$.
4) Période : 4

f) **1)** Domaine : $\mathbb{R}/\{^-1 + 2n\}$, où $n \in \mathbb{Z}$; codomaine : $\mathbb{R}$.
2) Aucun extremum.
3) Croissante sur son domaine.
4) Période : 2

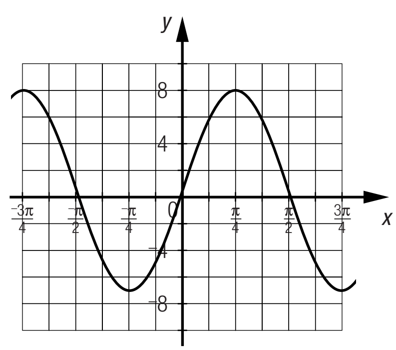
3. a)



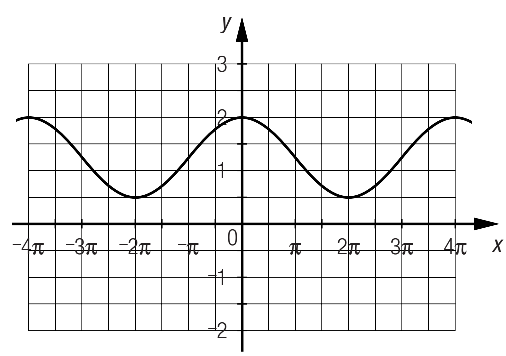
b)



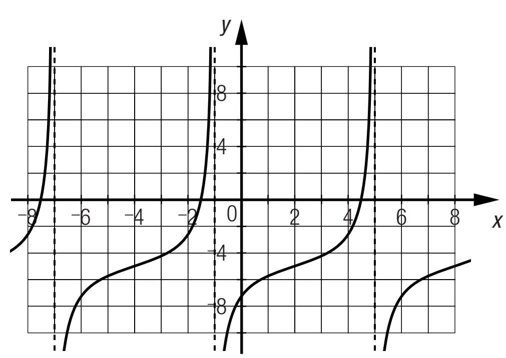
c)



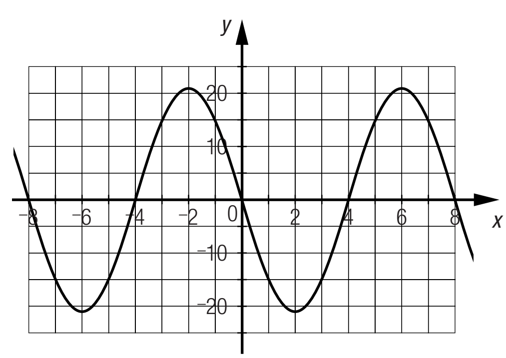
d)



e)



f)



Mise au point 6.2 (*suite*) **Page 103**

4. A 3, B 4, C 1, D 6, E 2, F 5

Mise au point 6.2 (*suite*) **Page 104**

5. *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

a) $y = 2\sin 2(x - 0{,}5\pi) + 1$
b) $y = 3\sin \pi(x + 2{,}5) - 1$
c) $y = {}^-3\sin 0{,}5\pi(x + 1) + 5$
d) $y = {}^-2{,}5\sin 0{,}5(x + 2\pi) + 1{,}5$
e) $y = \tan 0{,}5(x + \pi) + 2$
f) $y \approx {}^-0{,}97\tan 0{,}2\pi(x - 1) - 3$

6. a) 1) $(f + g)(x) = 5\sin 2(x - 3) + 5$
Période : $\frac{2\pi}{2} = \pi$

2) $(f - h)(x) = \sin 2(x - 3) + 6$
Période : $\frac{2\pi}{2} = \pi$

3) $(g + h)(x) = 4\sin 2(x - 3) - 1$
Période : $\frac{2\pi}{2} = \pi$

b) 1) $(f + g)(x) = 5\sin 2(x - 3) + 5$
Minimum : $5 - 5 = 0$
Maximum : $5 + 5 = 10$

2) $(f + h)(x) = 3\sin 2(x - 3) + 10$
Minimum : $10 - 3 = 7$
Maximum : $10 + 3 = 13$

3) $(g - h)(x) = 2\sin 2(x - 3) - 5$
Minimum : $-5 - 2 = -7$
Maximum : $-5 + 2 = -3$

c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $i(x) = -2\sin 2(x - 3) - 8$

Mise au point 6.2 (*suite*)

Page 105

7. a) 1) 2π **2)** 0 **b) 1)** 1 **2)** 2,5 **c) 1)** π **2)** 4

d) 1) π **2)** 4,5 **e) 1)** 5 **2)** $\approx -2{,}59$ **f) 1)** 2 **2)** 4

8. a) 1) $x = -1$ et $x = 5$.
2) $(2, 3)$ et $(-4, 3)$.

b) 1) $x = -5$, $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ et $x = 5$.
2) $(-6, -3)$, $(-4, -3)$, $(-2, -3)$, $(0, -3)$, $(2, -3)$, $(4, -3)$ et $(6, -3)$.

c) 1) $x = \frac{-3\pi}{2}$, $x = \frac{-\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
2) $(-2\pi, 2)$, $(-\pi, 2)$, $(0, 2)$, $(\pi, 2)$ et $(2\pi, 2)$.

d) 1) $x = \frac{-7\pi}{4}$, $x = \frac{-5\pi}{4}$, $x = \frac{-3\pi}{4}$, $x = \frac{-\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$.
2) $(-2\pi, -1)$, $\left(\frac{-3\pi}{2}, -1\right)$, $(-\pi, -1)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, -1\right)$, $(0, -1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$, $(\pi, -1)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ et $(2\pi, -1)$.

9. a) Croissante sur $\left[4\pi, \frac{17\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{19\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{27\pi}{4}, \frac{29\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{31\pi}{4}, 8\pi\right]$;
décroissante sur $\left[\frac{17\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{21\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{25\pi}{4}, \frac{27\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{29\pi}{4}, \frac{31\pi}{4}\right]$.

b) Croissante sur $[-6, -4] \cup [-2, 0] \cup [2, 4] \cup [6, 8]$;
décroissante sur $[-2\pi, -6] \cup [-4, -2] \cup [0, 2] \cup [4, 6] \cup [8, 3\pi]$.

c) Croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

10. a) 0 **b)** $-\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{\pi}{6}$ **d)** π **e)** 0

f) $\frac{\pi}{4}$ **g)** $-\frac{\pi}{6}$ **h)** $\frac{\pi}{2}$ **i)** $\frac{5\pi}{6}$

11. A 1, B 2, C 3

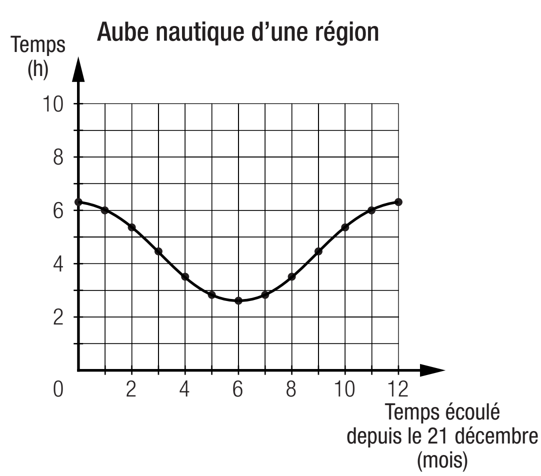
Mise au point 6.2 (*suite*)

Page 106

12. $T = 120\sin 120\pi x$

13. On entend la cloche sonner 12 fois par minute.

14. a)



b) $y = -1{,}85\sin\frac{\pi}{6}(x - 3) + 4{,}5$, où y représente l'heure de l'aube nautique (en h) et x, le temps écoulé (en mois) depuis le 21 décembre.

Mise au point 6.2 (*suite*)

15. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
$y = 45\sin\frac{2\pi}{11}\left(x - \frac{11}{4}\right) + 45$, où y représente le nombre de taches solaires observées et x, le temps (en années).

16. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
$y = 24\sin\frac{\pi}{12}(x - 8) + 24$, où y représente la température (en °C) et x, le temps (en h).

b) La température maximale est de 48 °C et la température minimale est de 0 °C.

c) La température minimale est atteinte à 2 h.

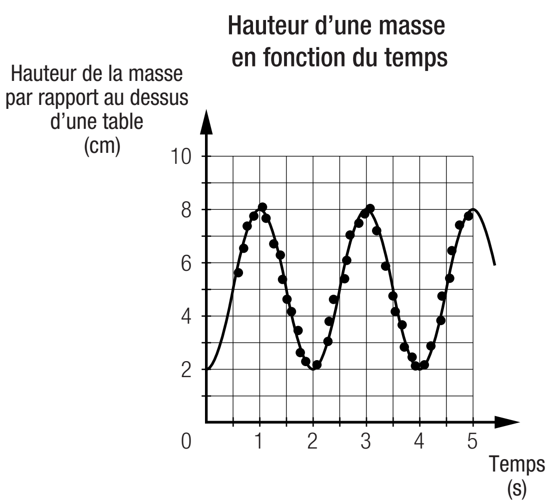
d) 1) La température est de 3,22 °C. **2)** La température est de 44,78 °C.
3) La température est de 40,97 °C. **4)** La température est de 17,79 °C.

Mise au point 6.2 (*suite*)

17. La règle de la fonction associée à la situation est $y = {}^{-}2\pi\sin\frac{\pi}{180}x$, où y est l'angle d'oscillation et x, la latitude.
La variation quotidienne de l'angle d'oscillation d'un pendule de Foucault situé dans la ville de Québec est environ de ⁻4,58 rad.

18. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

a)



b) $y = 3\sin\pi(x - 2{,}5) + 5$, où y représente la hauteur de la masse par rapport au dessus d'une table (en cm) et x, le temps (en s).

c) La hauteur de la masse au repos est de 5 cm.

d) La hauteur de la masse au début de l'expérience est de 2 cm.

e) 1) La masse se trouve à une hauteur de 2 cm.
2) La masse se trouve à une hauteur de 8 cm.
3) La masse se trouve à une hauteur de 5 cm.

SECTION 6.3 La résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques

Problème

Équation à résoudre : $30\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}x = 90$

$$\tan\frac{\pi}{3}x = \sqrt{3}$$
$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}x$$
$$x = 1$$

Période : $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$

On arrête le procédé d'enrichissement à la fin des jours 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 et 28.

Activité 1

Page 110

a. 1) La hauteur maximale de la matrice est de 3,5 mm.

2) La hauteur minimale de la matrice est de $-0{,}5$ mm.

b. La hauteur de la matrice est de 0,5 mm à 0 s, 4 s, 12 s et 16 s.

c. La résolution de cette équation permet de déterminer à quels moments la matrice est à une hauteur de 2,5 mm.

d. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

e. 1) Pour passer :

- de l'étape ① à l'étape ②, on soustrait 1,5 des deux membres de l'équation et on divise ensuite chacun par 2 ;
- de l'étape ② à l'étape ③, on isole l'argument du sinus ;
- de l'étape ③ à l'étape ④, on détermine les valeurs de θ pour lesquelles $\sin\theta = 0{,}5$, soit $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$;
- de l'étape ④ à l'étape ⑤, on multiplie les deux membres de l'équation par 6 et on divise par π ;
- de l'étape ⑤ à l'étape ⑥, on additionne 5 aux deux membres de l'équation.

2) Les valeurs trouvées représentent les moments lors des 12 premiers centièmes de seconde où la matrice atteint 2,5 mm.

f. 1) 12 centièmes de seconde.

2) Ces expressions permettent de déterminer, lors des 12 centièmes de seconde suivants, les moments où la matrice sera située à une hauteur de 2,5 mm.

g. 1) $2\sin\frac{\pi}{6}(x - 5) + 1{,}5 > 2{,}5$

2)]6, 10[centièmes de seconde et]18, 20[centièmes de seconde.

Mise au point 6.3

Page 114

1. a) $\left\{-\frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right\}$

b) Aucune solution.

c) $\left\{-\frac{45}{8}, -\frac{25}{8}, -\frac{5}{8}, \frac{15}{8}, \frac{35}{8}\right\}$

d) $\left\{-2\pi, \frac{-7\pi}{6}, -\pi, \frac{-\pi}{6}, 0, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}$

e) $\left\{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}, \frac{19}{8}, \frac{21}{8}, \frac{27}{8}, \frac{29}{8}, \frac{35}{8}, \frac{37}{8}, \frac{43}{8}, \frac{45}{8}\right\}$

f) $\left\{\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{13}{6}, \frac{19}{6}, \frac{25}{6}, \frac{31}{6}, \frac{37}{6}, \frac{43}{6}, \frac{49}{6}, \frac{55}{6}\right\}$

2. a) $x = \frac{3\pi}{2} - 1 + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

b) $x = \pi + 2\pi n$ et $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

c) $x = \frac{-19}{9} + \frac{4}{3}n$ et $\frac{-17}{9} + \frac{4}{3}n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

d) $x = 8\pi n$ et $6\pi + 8\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

e) $x = \frac{-3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

f) $x = \frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

g) $x = \frac{1}{6} + 2n$ et $\frac{11}{6} + 2n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

h) $x = \frac{28}{9} + \frac{4}{3}n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

3. a) $x = 2 + 12n$ et $x = 8 + 12n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

b) Aucune solution.

c) $x = 2{,}5 + 2n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

d) $x = \frac{13}{3} + 2n$ et $\frac{17}{3} + 2n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

e) $x = \frac{7\pi}{12} + \pi n$ et $\frac{11\pi}{12} + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

f) $x = \frac{-2}{3} + 4n$ et $\frac{8}{3} + 4n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

g) $x \approx -0{,}68 + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

h) $x = \frac{3\pi}{4} + 5 + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

4. a) Positif : $\left[-\frac{35}{6}, -\frac{31}{6}\right] \cup \left[-\frac{23}{6}, -\frac{19}{6}\right] \cup \left[-\frac{11}{6}, -\frac{7}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right] \cup \left[\frac{25}{6}, \frac{29}{6}\right] \cup \left[\frac{37}{6}, 2\pi\right]$;
négatif : $\left[-2\pi, -\frac{35}{6}\right] \cup \left[-\frac{31}{6}, -\frac{23}{6}\right] \cup \left[-\frac{19}{6}, -\frac{11}{6}\right] \cup \left[-\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{13}{6}\right] \cup \left[\frac{17}{6}, \frac{25}{6}\right] \cup \left[\frac{29}{6}, \frac{37}{6}\right]$.

b) Positif : $[-2\pi, 2\pi]$.

c) Positif : $\{-2{,}5, -0{,}5, 1{,}5\}$; négatif : $[-4, 2]$.

d) Positif : $\left[-\pi, -\frac{8}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right] \cup \left[\frac{26}{3}, \frac{28}{3}\right]$; négatif : $\left[-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right] \cup \left[\frac{16}{3}, \frac{26}{3}\right] \cup \left[\frac{28}{3}, 3\pi\right]$.

e) Positif : $\left]\frac{-5\pi}{2}, \frac{-9\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{-3\pi}{2}, \frac{-5\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}\right]$;
négatif : $\left[-3\pi, \frac{-5\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{-9\pi}{4}, \frac{-3\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{-5\pi}{4}, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{11\pi}{4}, 3\pi\right]$.

f) Positif : $[-\pi, -3[\cup \left[\frac{-13}{6}, -2\right[\cup \left[\frac{-7}{6}, -1\right[\cup \left[\frac{-1}{6}, 0\right[\cup \left[\frac{5}{6}, 1\right[\cup \left[\frac{11}{6}, 2\right[\cup \left[\frac{17}{6}, 3\right[$;
négatif : $\left]-3, \frac{-13}{6}\right] \cup \left]-2, \frac{-7}{6}\right] \cup \left]-1, \frac{-1}{6}\right] \cup \left]0, \frac{5}{6}\right] \cup \left]1, \frac{11}{6}\right] \cup \left]2, \frac{17}{6}\right] \cup]3, \pi]$.

Mise au point 6.3 (*suite*)

5. a) $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$ et $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

b) $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$ et $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

c) Aucune solution.

d) $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$ et $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

e) $x = 0 + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

f) Aucune solution.

g) Aucune solution.

h) $x \approx 1{,}56 + \pi n$ et $x \approx 1{,}58 + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

6. a)

$$0 = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

$$1 = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{4}$

$x = \frac{-\pi}{24}$ $\qquad$ $x = \frac{11\pi}{24}$

Période : $\frac{\pi}{2}$

Positif : $\left[\frac{-\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right[$; négatif : $\left]\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

b) $0 = -3\tan x + \sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan x$

$x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{7\pi}{6}$

Période : $\frac{\pi}{1} = \pi$

Positif : $\left]\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{7\pi}{6} + \pi n\right]$; négatif : $\left[\frac{7\pi}{6} + \pi n, \frac{3\pi}{2} + \pi n\right[$, où $n \in \mathbb{Z}$.

c)

$$0 = 2\tan \frac{\pi}{6}(x - 2)$$

$$0 = \tan \frac{\pi}{6}(x - 2)$$

$0 = \frac{\pi}{6}(x - 2)$ et $\pi = \frac{\pi}{6}(x - 2)$

$x = 2$ $\qquad$ $x = 8$

Période : $\frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = 6$

Positif : $[2 + 6n, 5 + 6n[$; négatif : $]-1 + 6n, 2 + 6n[$, où $n \in \mathbb{Z}$.

7. a) $\left]-\pi, \frac{-17\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{-13\pi}{24}, \frac{-5\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{24}, \frac{19\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{23\pi}{24}, \pi\right[$

b) $\left[\frac{-27\pi}{16}, \frac{-19\pi}{16}\right] \cup \left[\frac{-11\pi}{16}, \frac{-3\pi}{16}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}\right]$

c) $\left]\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right[$

d) $[0, 4]$

e) $\left]-3\pi, \frac{-8\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{-7\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 3\pi\right[$

f) $\left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

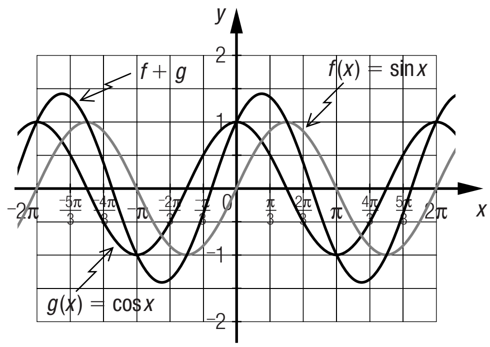
8. Récrire chaque règle sous la forme $y = \mathrm{a}\sin \mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$ de façon que les expressions $\sin \mathrm{b}(x - \mathrm{h})$ soient identiques.
$f(x) = 2\sin \pi x - 4$, $g(x) = -3\sin \pi x + 1$ et $h(x) = \sin \pi x - 2$.

a) $(f + g)(x) = -\sin \pi x - 3$ Il n'y a donc pas de solution.

b) $(f + h)(x) = 3\sin \pi x - 6$ Il n'y a donc pas de solution.

c) $(g + h)(x) = -2\sin \pi x - 1$ Les zéros sont : $x = \frac{7}{6} + 2n$ et $x = \frac{11}{6} + 2n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

9. a)



b) 1) $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

2) $y = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) 1) $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ et $x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.

2) Ces valeurs sont associées au maximum de la fonction $f + g$.

d) 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.

2) Ces valeurs sont associées au maximum de la fonction f.

e) 1) $x = n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.

2) Ces valeurs sont associées au maximum de la fonction g.

10. a) $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.

b) $\frac{-\pi}{3} + n\pi < x < \frac{\pi}{3} + n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.

c) $x = 2 + 4n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

d) $0 + n\pi < x < \frac{\pi}{4} + n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.

e) $\frac{\pi}{8} + n\pi \le x \le \frac{7\pi}{8} + n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.

f) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

11. a) $\{-3{,}5, -1{,}5, 0{,}5, 2{,}5\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

c) $\{-1{,}75, -1{,}25, -0{,}75, -0{,}25, 0{,}25, 0{,}75, 1{,}25, 1{,}75\}$

d) $0{,}91\overline{6}$ et $1{,}58\overline{3}$.

e) $\left\{-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$

f) $\left\{\frac{-5\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$

12.
$$1000 = 1000\tan\frac{\pi}{60}x$$
$$1 = \tan\frac{\pi}{60}x$$
$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{60}x$$
$$x = 15 \text{ s}$$

Le parachute se déploie au bout de 15 s.

13. La règle de la fonction associée à la situation est $y = 3\sin 180\pi x + 4$, où y est la distance (en cm) et x, le temps (en s).

a) Résoudre l'équation $3\sin 180\pi x + 4 = 2$.
La pointe de la lame se trouve à 2 cm de la planche à environ 7 ms et à environ 1 centième de seconde.

b) La pointe de la lame se trouve à une distance d'au moins 5 cm de la planche pendant environ 4 ms.

14. Les pieds de Léonie touchent le fond pendant 200 s.

15. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $y = -35\cos 0{,}5\pi x + 50$, où y est l'intensité du son (en dB) et x, le temps (en s).

b) 1) Résoudre l'équation $68 = 35\sin 0{,}5\pi(x - 1) + 50$.
Les moments où l'intensité du son est égale à 80 % de l'intensité maximale durant la première minute sont à : ≈ 1,34 s, ≈ 2,66 s, ≈ 5,34 s, ≈ 6,66 s, ≈ 9,34 s, ≈ 10,66 s, ≈ 13,34 s, ≈ 14,66 s, ≈ 17,34 s, ≈ 18,66 s, ≈ 21,34 s, ≈ 22,66 s, ≈ 25,34 s, ≈ 26,66 s, ≈ 29,34 s, ≈ 30,66 s, ≈ 33,34 s, ≈ 34,66 s, ≈ 37,34 s, ≈ 38,66 s, ≈ 41,34 s, ≈ 42,66 s, ≈ 45,34 s, ≈ 46,66 s, ≈ 49,34 s, ≈ 50,66 s, ≈ 53,34 s, ≈ 54,66 s, ≈ 57,34 s et ≈ 58,66 s.

2) Résoudre l'inéquation $70 = 35\sin 0{,}5\pi(x - 1) + 50$.
Lors de la première oscillation, l'intensité du son est supérieure à 70 dB pendant environ 1,23 s. Donc durant la première minute, l'intensité du son est supérieure à 70 dB pendant environ 18,38 s.

16. a) 1) La règle de la fonction qui correspond à la position verticale du pied droit est $y = 12\sin 5\pi(x - 0{,}2) - 9$, où y représente la position verticale (en cm) et x, le temps (en s).

2) La règle de la fonction qui correspond à la position verticale du pied gauche est $y = 12\sin(5\pi x) - 9$, où y représente la position verticale (en cm) et x, le temps (en s).

b) 1) Le pied droit entre dans l'eau à environ 0,35 s, 0,75 s, 1,15 s, 1,55 s et 1,95 s.

2) Le pied gauche est hors de l'eau entre environ 0,05 s et 0,15 s, 0,45 s et 0,55 s, 0,85 s et 0,95 s, 1,25 s et 1,35 s, 1,65 s et 1,75 s.

3) Les deux pieds sont dans l'eau entre environ 0 s et 0,05 s, 0,15 s et 0,25 s, 0,35 s et 0,45 s, 0,55 s et 0,65 s, 0,75 s et 0,85 s, 0,95 s et 1,05 s, 1,15 s et 1,25 s, 1,35 s et 1,45 s, 1,55 s et 1,65 s, 1,75 s et 1,85 s, 1,95 s et 2 s.

Mise au point 6.3 (*suite*)

Page 119

17. a)
$$450 = 500\sin 0{,}25\pi x + 700$$
$$-\frac{1}{2} = \sin 0{,}25\pi x$$
$$\frac{7\pi}{6} = 0{,}25\pi x$$
$$x \approx 4{,}67 \text{ mois.}$$

La population de bernaches passe au-dessous de la barre des 450 000 individus pour la première fois à 4,67 mois environ.

b) La population de bernaches est supérieure ou égale à 1 million d'individus pendant environ 4,72 mois.

c) Cette population de bernaches passe de 400 000 à 700 000 individus en 0,82 mois environ.

18. a) 1) 600 fois.
2) 1200 fois.
3) 1200 fois.

b) 1) À $0{,}008\overline{3}$ s, $0{,}041\overline{6}$ s, $0{,}108\overline{3}$ s, $0{,}141\overline{6}$ s, …, $54{,}141\overline{6}$ s.
2) À 0,05 s, 0,1 s, 0,15 s, 0,2 s, …, 59,95 s.
3) À 0,075 s, 0,175 s, 0,275 s, 0,375 s, …, 59,975 s.

c) 1) 300 fois.
2) 300 fois.
3) 150 fois.

d) 1) À 0,35 s, 0,75 s, 1,15 s, 1,55 s, …, 59,95 s.
2) À $0{,}01\overline{6}$ s, $0{,}28\overline{3}$ s, $0{,}41\overline{6}$ s, $0{,}68\overline{3}$ s, …, $59{,}88\overline{3}$ s.
3) À 0,05 s, 0,25 s, 0,45 s, 0,65 s, …, 59,85 s.

SECTION 6.4 Les identités trigonométriques

Problème

Page 120

$$\tan x \sin x = \cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x}\sin x = \cos x$$
$$\sin^2 x = \cos^2 x$$
$$\pm\sin x = \pm\cos x$$

Il y a 4 valeurs possibles qui satisfont cette équation, soit $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

Karl a raison, il y a quatre valeurs de x qui vérifient cette équation.

Activité 1

Page 121

a. 1) La mesure du segment AE correspond au cosinus de l'angle CAE.
2) La mesure du segment CE correspond au sinus de l'angle CAE.

b. $(\text{m } \overline{AE})^2 + (\text{m } \overline{CE})^2 = (\text{m } \overline{AC})^2$
$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

c. 1) Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables (AA).
2) Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables (AA).
3) Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables (AA).
4) Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables (AA).

d. La mesure du segment CD correspond à la tangente de l'angle CAE.

Activité 1 (*suite*)

e. 1) $\dfrac{m\ \overline{BC}}{1} = \dfrac{1}{\tan\theta}$ **2)** $m\ \overline{BC} = \dfrac{1}{\tan\theta}$ **3)** Ce sont des inverses multiplicatifs.

f. 1) $\dfrac{m\ \overline{AD}}{1} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ **2)** $m\ \overline{AD} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ **3)** Ce sont des inverses multiplicatifs.

g. $(m\ \overline{AC})^2 + (m\ \overline{CD})^2 = (m\ \overline{AD})^2$

$1 + (\tan\theta)^2 = \left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$ ou $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

h. 1) $\dfrac{\sin\theta}{1} = \dfrac{1}{m\ \overline{AB}}$ **2)** $m\ \overline{AB} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ **3)** Ce sont des inverses multiplicatifs.

i. $(m\ \overline{AC})^2 + (m\ \overline{BC})^2 = (m\ \overline{AB})^2$

$1 + \left(\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)^2$ ou $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$.

Mise au point 6.4

1. a) $\sin^2 x$ **b)** $^-\cos^2 x$ **c)** $\cot^2 x$ **d)** $\sin^2 x$
e) $\cot^2 x$ **f)** $\tan x$ **g)** 1 **h)** $^-1$

2. a) 1) 1 **2)** 1 **3)** 1
b) Le produit d'un rapport trigonométrique par son inverse est toujours égal à 1.

3. a) $\left\{\dfrac{^-7\pi}{4}, \dfrac{^-3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$ **b)** $\{^-2\pi, 0, 2\pi\}$ **c)** $\left\{^-2\pi, \dfrac{^-3\pi}{2}, ^-\pi, \dfrac{^-\pi}{2}, 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$
d) $\{^-2\pi, ^-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$ **e)** $\{^-2\pi, ^-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$ **f)** $\left\{\dfrac{^-3\pi}{2}, \dfrac{^-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

4. a) $\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$ **b)** $\dfrac{\sin x\sqrt{1 - \sin^2 x}}{1 - \sin^2 x}$ **c)** $\sqrt{1 - \sin^2 x}$
d) $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ **e)** $\dfrac{1}{1 - \cos^2 x}$ **f)** $\dfrac{1}{1 - \sin^2 x}$

5. a) $\text{cosec}\, x$ **b)** $\text{cosec}^2 x$ **c)** $\sin^2 x$ **d)** $\cos x$ **e)** $\cos^2 x$ **f)** 1

Mise au point 6.4 (*suite*)

6. a)
$$\begin{aligned} \sin x \sec x &= \tan x \\ \frac{\sin x}{\cos x} &= \tan x \\ \tan x &= \tan x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \tan^2 x\, \text{cosec}^2 x &= \sec^2 x \\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\sin^2 x} &= \sec^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} &= \sec^2 x \\ \sec^2 x &= \sec^2 x \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2\cos x \sec^2 x &= 2\sec x \\ \frac{2\cos x}{\cos^2 x} &= 2\sec x \\ \frac{2}{\cos x} &= 2\sec x \\ 2\sec x &= 2\sec x \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} (1 - \cos x)(1 + \cos x) &= \sin^2 x \\ 1 - \cos^2 x &= \sin^2 x \\ \sin^2 x &= \sin^2 x \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} - 1 &= \cot^2 x \\ \text{cosec}^2 x - 1 &= \cot^2 x \\ \cot^2 x &= \cot^2 x \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} \cot x(\cos x + \tan x \sin x) &= \text{cosec}\, x \\ \cot x \cos x + \cot x \tan x \sin x) &= \text{cosec}\, x \\ \frac{\cos^2 x}{\sin x} + \sin x &= \text{cosec}\, x \\ \frac{\cos^2 x}{\sin x} + \frac{\sin^2 x}{\sin x} &= \text{cosec}\, x \\ \frac{1}{\sin x} &= \text{cosec}\, x \\ \text{cosec}\, x &= \text{cosec}\, x \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned}(\text{cosec}^2 x - 1)(\sec^2 x - 1) &= 1\\ \tan^2 x \cot^2 x &= 1\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned}\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \sin x &= \text{cosec}\, x\\ \frac{\cos^2 x}{\sin x} + \frac{\sin^2 x}{\sin x} &= \text{cosec}\, x\\ \frac{1}{\sin x} &= \text{cosec}\, x\\ \text{cosec}\, x &= \text{cosec}\, x\end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned}\sin^2 x \cot^2 x + \sin^2 x &= 1\\ \sin^2 x(\cot^2 x + 1) &= 1\\ \sin^2 x\, \text{cosec}^2 x &= 1\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned}\cos^2 x \tan^2 x + \cos^2 x &= 1\\ \cos^2 x(\tan^2 x + 1) &= 1\\ \cos^2 x \sec^2 x &= 1\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

7. a) $x = \frac{\pi n}{3}$, où $n \in \mathbb{Z}$. **b)** Aucune solution. **c)** $x = \frac{3\pi n}{4}$, où $n \in \mathbb{Z}$.

d) Aucune solution. **e)** Aucune solution. **f)** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.

8. a) 1,25 **b)** 2 **c)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. a) $$\begin{aligned}\sin^2 x &= 1 - \cot^2 x \sin^2 x\\ 1 - \cos^2 x &= 1 - \cot^2 x \sin^2 x\\ 1 - \cos^2 x \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} &= 1 - \cot^2 x \sin^2 x\\ 1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \sin^2 x &= 1 - \cot^2 x \sin^2 x\\ 1 - \cot^2 x \sin^2 x &= 1 - \cot^2 x \sin^2 x\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sin x \cot x &= \cos x\\ \sin x \frac{\cos x}{\sin x} &= \cos x\\ \frac{\sin x}{\sin x} \cos x &= \cos x\\ \cos x &= \cos x\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x} &= 2\cos^2 x - 1\\ \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}} &= 2\cos^2 x - 1\\ \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x}} &= 2\cos^2 x - 1\\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} \times \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} &= 2\cos^2 x - 1\\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} &= 2\cos^2 x - 1\\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} &= 2\cos^2 x - 1\\ \cos^2 x - \sin^2 x &= 2\cos^2 x - 1\\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) &= 2\cos^2 x - 1\\ 2\cos^2 x - 1 &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\tan x(\sin x + \cot x \cos x) &= \sec x\\ \frac{\sin x}{\cos x}\left(\sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \cos x\right) &= \sec x\\ \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x &= \sec x\\ \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} &= \sec x\\ \frac{1}{\cos x} &= \sec x\\ \sec x &= \sec x\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}(1 - \sin^2 x)(1 + \cot^2 x) &= \cot^2 x\\ \cos^2 x\, \text{cosec}^2 x &= \cot^2 x\\ \cos^2 x \frac{1}{\sin^2 x} &= \cot^2 x\\ \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} &= \cot^2 x\\ \cot^2 x &= \cot^2 x\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}\sin^2 x \cot^2 x \sec x &= \cos x\\ \sin^2 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \frac{1}{\cos x} &= \cos x\\ \cos x &= \cos x\end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned}\cos x \sqrt{\sec^2 x - 1} &= \sin x\\ \cos x \sqrt{\tan^2 x} &= \sin x\\ \cos x \tan x &= \sin x\\ \cos x \frac{\sin x}{\cos x} &= \sin x\\ \sin x &= \sin x\end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned}\tan^2 x + \cos^2 x - 1 &= \sin^2 x \tan^2 x\\ \tan^2 x + \cos^2 x - (\cos^2 x + \sin^2 x) &= \sin^2 x \tan^2 x\\ \tan^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x &= \sin^2 x \tan^2 x\\ \tan^2 x - \sin^2 x &= \sin^2 x \tan^2 x\\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x &= \sin^2 x \tan^2 x\\ \sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) &= \sin^2 x \tan^2 x\\ \sin^2 x(\sec^2 x - 1) &= \sin^2 x \tan^2 x\\ \sin^2 x \tan^2 x &= \sin^2 x \tan^2 x\end{aligned}$$

i) $\sin^2 x + \dfrac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} + \cos^2 x = \sec^2 x$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \sec^2 x$$
$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$
$$\sec^2 x = \sec^2 x$$

j) $\dfrac{\sin x \sec x}{\text{cosec}\, x\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \tan^2 x$

$$\frac{\sin x \sec x}{\text{cosec}\, x\sqrt{\cos^2 x}} = \tan^2 x$$
$$\frac{\sin x \sec x}{\text{cosec}\, x \cos x} = \tan^2 x$$
$$\frac{\sin x \dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1}{\sin x}\cos x} = \tan^2 x$$
$$\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}} = \tan^2 x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \tan^2 x$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$
$$\tan^2 x = \tan^2 x$$

Mise au point 6.4 (*suite*)

Page 126

10. Factoriser l'expression $\cos^4 x - 3\cos^2 x + 2$.
$(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x - 2) = 0$

Les solutions sont donc $\{^-2\pi, ^-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$.

11. a) $\sin\dfrac{\pi}{8} = \sin\dfrac{\frac{\pi}{4}}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

b) $\cos\dfrac{^-5\pi}{8} = \cos\dfrac{\frac{^-5\pi}{4}}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\frac{^-5\pi}{4}}{2}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{^-\sqrt{2}}{2}}{2}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

c) $\tan\dfrac{5\pi}{8} = \tan\dfrac{\frac{5\pi}{4}}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\frac{5\pi}{4}}{1 + \cos\frac{5\pi}{4}}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{^-\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{^-\sqrt{2}}{2}}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{4 - 2}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{6 + 4\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

d) $\tan\dfrac{^-15\pi}{8} = \tan\dfrac{\frac{^-15\pi}{4}}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\frac{^-15\pi}{4}}{1 + \cos\frac{^-15\pi}{4}}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4 - 2}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

e) $\sin\dfrac{3\pi}{12} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\sin\frac{-\pi}{8} = \sin\frac{\frac{-\pi}{4}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{-\pi}{4}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$

$= \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

g) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{\frac{7\pi}{6}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\frac{7\pi}{6}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{-\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$

$= \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

h) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$

$= \pm\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

i) $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{1 + \cos\frac{\pi}{6}}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}}$

$= \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}}$

$= \pm\sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{4 - 3}}$

$= \pm\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

12. a)

$$\frac{1 + \tan^2 x}{\text{cosec}^2 x} = \tan^2 x$$

$$\frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2 x} = \tan^2 x$$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \tan^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \times \sin^2 x = \tan^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

$$\tan^2 x = \tan^2 x$$

b)

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

$$\frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

$$1 + \cos x = 1 + \cos x$$

c)

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x \tan^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x \tan^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x\,(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \sin^2 x \tan^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x \tan^2 x$$

$$\sin^2 x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x \tan^2 x$$

$$\sin^2 x \tan^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$$

d)

$$\frac{\sec x}{\cos x} - \frac{\tan x}{\cot x} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{\cos x}}{\cos x} - \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = 1$$

$$\frac{1}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$1 = 1$$

e)
$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

f)
$$\frac{\cos^2 x \tan x}{\cot x} = \sin^2 x$$
$$\frac{\cos^2 x \times \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \sin^2 x$$
$$\cos^2 x \times \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x$$
$$\cos^2 x \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x$$
$$\sin^2 x = \sin^2 x$$

g)
$$(\operatorname{cosec} x - \cot x)^2 = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$
$$\operatorname{cosec}^2 x - 2 \operatorname{cosec} x \cot x + \cot^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$
$$\frac{1}{\sin^2 x} - 2\frac{1}{\sin x}\,\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$
$$\frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$
$$\frac{\cos^2 x - 2\cos x + 1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$
$$\frac{(1 - \cos x)^2}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$
$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

h)
$$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} + \sin^2 x + \cos^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$
$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$$
$$\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$$
$$\operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

13. a) $\left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$ **b)** $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\right\}$ **c)** $\{-2\pi, 0, 2\pi\}$

d) Aucune solution. **e)** $\left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$ **f)** $\{\approx -2{,}19, \approx -0{,}96, \approx 0{,}96, \approx 2{,}19\}$

Mise au point 6.4 (*suite*)

14. a) $-\sin x$ **b)** $\cos x$ **c)** $\sin x$ **d)** $\cos x$ **e)** $\sin x$

f) $-\cos x$ **g)** $-\tan x$ **h)** $\cot x$ **i)** $-\tan x$ **j)** $-\sin x$

15.
$$\frac{\cos^2 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \sin^4 x} = 1$$
$$\frac{\cos^2 x(1 - \cos^2 x)}{\sin^2 x(1 - \sin^2 x)} = 1$$
$$\frac{\cos^2 x \times \sin^2 x}{\sin^2 x \times \cos^2 x} = 1$$
$$1 = 1$$

16. a) $\sin x$ **b)** 0 **c)** -1 **d)** $\cos x$ **e)** $\tan x$ **f)** $\operatorname{cosec} x$

17. a)
$$\frac{\operatorname{cosec} x}{1 + \sec x} = \frac{\cot x}{1 + \cos x}$$
$$\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x + 1}{\cos x}} = \frac{\cot x}{1 + \cos x}$$
$$\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\cos x + 1} = \frac{\cot x}{1 + \cos x}$$
$$\frac{\cot x}{1 + \cos x} = \frac{\cot x}{1 + \cos x}$$

b)
$$\operatorname{cosec} x - \sin x = \cos x \cot x$$
$$\frac{1}{\sin x} - \sin x = \cos x \cot x$$
$$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \cos x \cot x$$
$$\frac{\cos^2 x}{\sin x} = \cos x \cot x$$
$$\cos x \cot x = \cos x \cot x$$

c) $\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x + \cot x) = \dfrac{1}{1 - \cos x}$

$$\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cot x = \frac{1}{1 - \cos x}$$
$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{1 - \cos x}$$
$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{1 - \cos x}$$
$$\frac{1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{1 - \cos x}$$
$$\frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - \cos x}$$

d) $(1 + \sec x)(\sec x - 1) = \dfrac{\sin x \sec x}{\cos x \operatorname{cosec} x}$

$$\sec^2 x - 1 = \frac{\sin x \sec x}{\cos x \operatorname{cosec} x}$$
$$\tan^2 x = \frac{\sin x \sec x}{\cos x \operatorname{cosec} x}$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \sec x}{\cos x \operatorname{cosec} x}$$
$$\frac{\sin x \sec x}{\cos x \operatorname{cosec} x} = \frac{\sin x \sec x}{\cos x \operatorname{cosec} x}$$

e) $\dfrac{1 + \sin x}{\sin x - 1} + \dfrac{1 + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x - 1} = 0$

$$\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{cosec} x}}{\frac{1}{\operatorname{cosec} x} - 1} + \frac{1 + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x - 1} = 0$$
$$\frac{\frac{\operatorname{cosec} x + 1}{\operatorname{cosec} x}}{\frac{1 - \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x}} + \frac{1 + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x - 1} = 0$$
$$\frac{1 + \operatorname{cosec} x}{1 - \operatorname{cosec} x} + \frac{1 + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x - 1} = 0$$
$$\frac{-(1 + \operatorname{cosec} x)}{\operatorname{cosec} x - 1} + \frac{1 + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x - 1} = 0$$

f) $\dfrac{\tan x - \sin x}{\tan x \sin x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\frac{\sin^2 x}{\cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$
$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$
$$\frac{\sin x - \cos x \sin x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$
$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

RUBRIQUES PARTICULIÈRES 6

Chronique du passé

Page 129

1. a) $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}$ **b)** $\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$

2.
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos a + \sin\frac{\pi}{2}\sin a$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 0\cos a + 1\sin a$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

3. a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{12}{17}$ **c)** $\dfrac{32}{37}$

4.
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x = \cos^2 x - \cos 2x$$
$$\sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \cos 2x$$
$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Le monde du travail

Page 131

1. a) 1) La vitesse de la station spatiale est environ de 0,07 rad/min.
2) La vitesse du satellite de communication est environ de 0,07 rad/min.

b) 1) La distance parcourue par la station spatiale est de 27 084 km.
2) La distance parcourue par la station spatiale est de 67 710 km.
3) La distance parcourue par la station spatiale est environ de 4 254 344,77 km.

2. a) 1) La période de la fonction est de 90 min.

2) La règle est $y = 54\sin\frac{\pi x}{45}$, où y représente la latitude (en °) et x, le temps (en min).

b) 1) La SSI se trouve à environ $^-46,77°$ de latitude. **2)** La SSI se trouve à 0° de latitude.

3) La SSI se trouve à environ $^-46,77°$ de latitude.

c) La latitude de la SSI est supérieure à 36° de 10,45 min environ à environ 34,55 min.

Vue d'ensemble

1.

Mesure d'angle (rad)	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\mathbf{\frac{29\pi}{12}}$	$-\frac{2\pi}{9}$	$\mathbf{\frac{^-50\pi}{9}}$	$^-4,5$
Mesure d'angle (°)	**270**	**$^-$60**	435	**$^-$40**	$^-1000$	**≈ $^-$257,83**

2. a) Vraie. P(0, 1)

b) Fausse. Le rayon du cercle trigonométrique est de 1.

c) Vraie. Les coordonnées de ce point sont $(0, ^-1)$.

d) Vraie. Les cordonnées de ces points sont $\left(\frac{^-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

e) Fausse. Ces points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

3. a) $\left(\frac{^-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **b)** $(\approx {^-0,65}, \approx {^-0,76})$ **c)** (0, 1) **d)** $(\approx {^-0,94}, \approx 0,34)$

e) $(\approx {^-0,99}, \approx {^-0,14})$ **f)** $(\approx 0,62, \approx {^-0,78})$ **g)** $(\approx 0,0044, \approx {^-1})$ **h)** $(\approx {^-0,99}, \approx 0,16)$

4. a) $P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{^-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La distance qui sépare ces deux points est de 1 unité.

b) $P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, ^-1)$ et $P\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La distance qui sépare ces deux points est environ de 1,85 unité.

c) $P\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $P(2) = (\cos 2, \sin 2)$, soit $(\approx {^-0,41}, \approx 0,91)$.

La distance qui sépare ces deux points est environ de 1,35 unité.

d) $P\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \left(\cos\frac{4\pi}{9}, \sin\frac{4\pi}{9}\right)$, soit $(\approx 0,17, \approx 0,98)$ et $P(^-3) = (\cos {^-3}, \sin {^-3})$, soit $(\approx {^-0,99}, \approx {^-0,14})$.

La distance qui sépare ces deux points est environ de 1,62 unité.

5. a) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ **b)** $^-0,8$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** $\approx {^-0,45}$

Vue d'ensemble (*suite*)

6. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **b)** $\frac{\sqrt{15}}{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{10}}{5}$ **d)** $\frac{-\sqrt{15}}{5}$ **e)** $\frac{-\sqrt{6}}{2}$

f) $\frac{-\sqrt{10}}{2}$ **g)** $\approx {^-0,89}$ **h)** $\approx 2,26$ **i)** $\approx {^-0,89}$

7. a) $\tan^2 x$ **b)** $\tan x$ **c)** 1 **d)** $^-\sin^2 x$

e) 1 **f)** $\text{cosec}^2 x$ **g)** $\cot x$ **h)** $\text{cosec}\, x \sec x$

8. a) $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ **b)** $\frac{\sin x\sqrt{1 - \sin^2 x}}{1 - \sin^2 x}$ **c)** $\sin x$

d) $\frac{^-\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$ **e)** $\frac{1}{\sin^2 x}$ **f)** $\sqrt{1 - \sin^2 x} + \frac{1}{\sin x}$

9. a) 1) 4 **2)** $\frac{4}{3}$ **3)** Minimum : -8 ; maximum : 0.

4) Croissante : $\left[0 + \frac{4n}{3}, \frac{2}{3} + \frac{4n}{3}\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$; décroissante : $\left[\frac{2}{3} + \frac{4n}{3}, \frac{4}{3} + \frac{4n}{3}\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

5) Positif : $\left[\frac{2}{3} + \frac{4n}{3}\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$; négatif : $\mathbb{R}$.

b) 1) 2 **2)** 2 **3)** Minimum : -3 ; maximum : 1.

4) Croissante : $[1 + 2n, 2 + 2n]$, où $n \in \mathbb{Z}$; décroissante : $[0 + 2n, 1 + 2n]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

5) Positif : $\left[\frac{-1}{3} + 2n, \frac{1}{3} + 2n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$; négatif : $\left[\frac{1}{3} + 2n, \frac{5}{3} + 2n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

c) 1) 3 **2)** π **3)** Minimum : 5 ; maximum : 11.

4) Croissante : $\left[\frac{-5\pi}{12} + \pi n, \frac{\pi}{12} + \pi n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$; décroissante : $\left[\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{7\pi}{12} + \pi n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

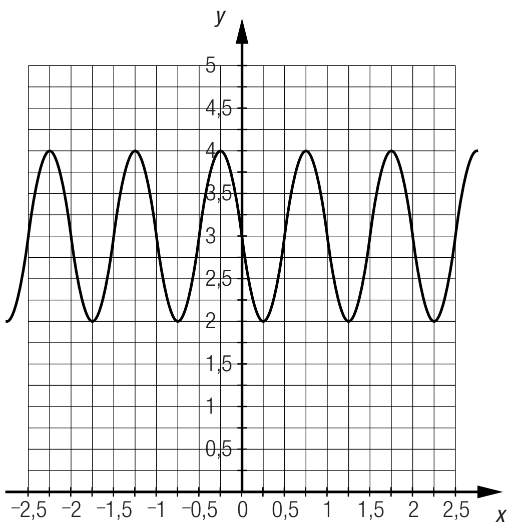
5) Positif : $\mathbb{R}$.

d) 1) 1 **2)** 9 **3)** Minimum : $-0{,}5$; maximum : 1,5.

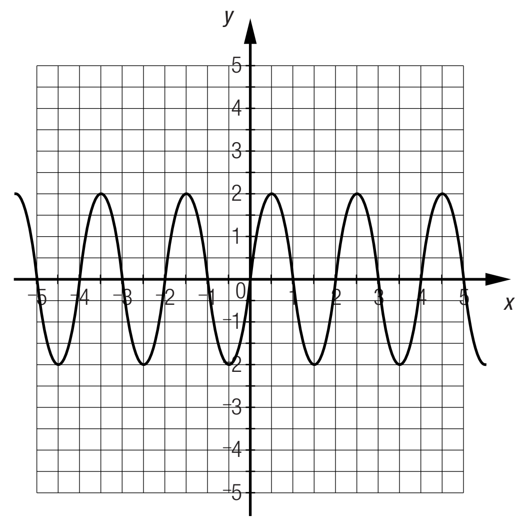
4) Croissante : $[-1 + 9n, 3{,}5 + 9n]$, où $n \in \mathbb{Z}$; décroissante : $[3{,}5 + 9n, 8 + 9n]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

5) Positif : $[0{,}5 + 9n, 6{,}5 + 9n]$, où $n \in \mathbb{Z}$; négatif : $[-2{,}5 + 9n, 0{,}5 + 9n]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

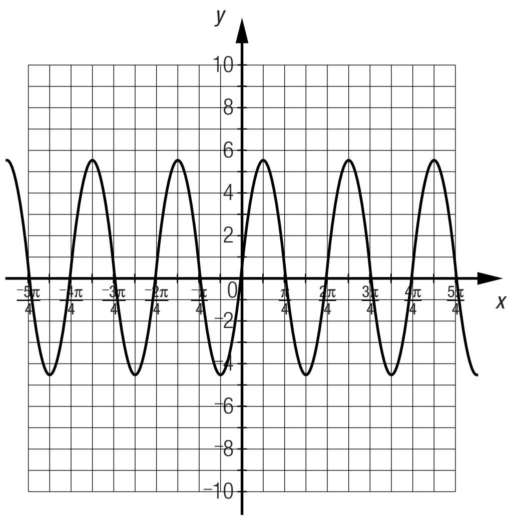
10. a)



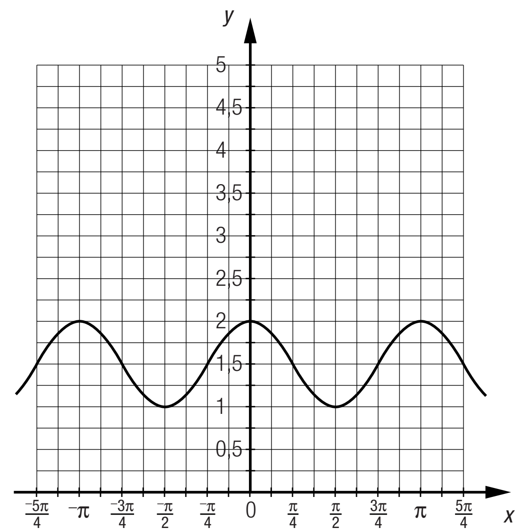
b)



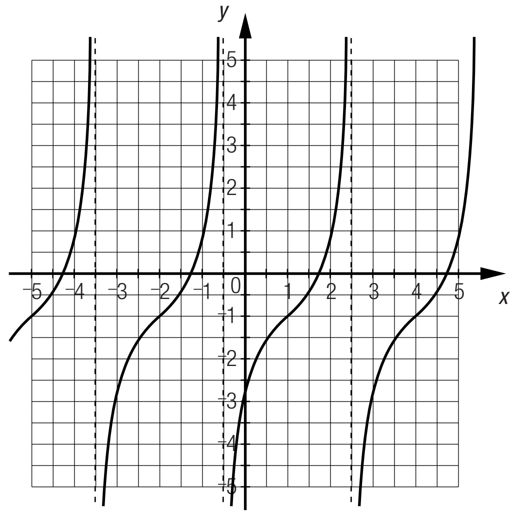
c)



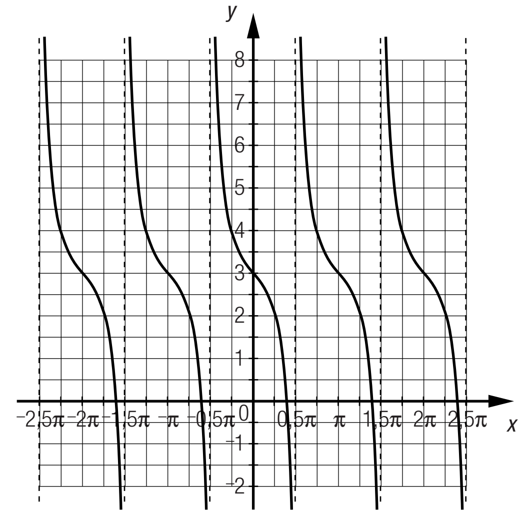
d)



e)



f)



Vue d'ensemble (*suite*)

Page 134

11. a) $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$ et $x = \frac{13\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, où $n \in \mathbb{Z}$.
b) $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $x = \pi + 2n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$.
c) $x = \frac{10}{3} + \frac{4n}{3}$, où $n \in \mathbb{Z}$.
d) $x = {^-1} + \frac{12n}{5}$ et $x = \frac{^-3}{5} + \frac{12n}{5}$, où $n \in \mathbb{Z}$.
e) $x = \frac{^-25\pi}{84} + \frac{\pi n}{2}$, où $n \in \mathbb{Z}$.
f) $x = \frac{^-1}{9} + \frac{2n}{3}$, où $n \in \mathbb{Z}$.
g) $x = \frac{13\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}$ et $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{5}$, où $n \in \mathbb{Z}$.
h) Aucun zéro.

12. *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*
a) $y = {^-4}\sin \pi(x - 3) + 2$
b) $y = 2\sin 0{,}5\pi(x - 1) - 4$
c) $y = {^-3}\sin 0{,}5(x - \pi) + 1$
d) $y = {^-4}\sin 0{,}1\pi(x - 7) + 3$
e) $y = 3\tan 0{,}25\pi(x - 1) + 1$
f) $y = {^-}\tan 0{,}4(x + \pi) - 3$

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 135

13. a) Oui. **b)** Non. **c)** Non.

14. a) 1) $y = {^-3}\sin 0{,}5\pi(x - 1) + 2$
2) $y = 3\cos 0{,}5\pi x + 2$
b) 1) $x \approx 1{,}46 + 4n$ et $x \approx 2{,}54 + 4n$, où $n \in \mathbb{Z}$.
2) $]\approx {^-0{,}54} + 4n, \approx 0{,}54 + 4n[$, où $n \in \mathbb{Z}$.

15. a) $\left]\frac{^-15\pi}{4} + 10\pi n, \frac{^-5\pi}{4} + 10\pi n\right[$, où $n \in \mathbb{Z}$.
b) $\left[\frac{^-1}{3} + 2n, \frac{4}{3} + 2n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$.
c) $\left]\frac{7}{8} + 1{,}5n, 1{,}25 + 1{,}5n\right[$, où $n \in \mathbb{Z}$.
d) $\left]\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + \pi n\right[$, où $n \in \mathbb{Z}$.
e) $\mathbb{R}$
f) $\left[\frac{^-\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$.
g) $]\approx {^-0{,}11} + 2n, \approx 1{,}11 + 2n[$, où $n \in \mathbb{Z}$.
h) $[\approx 1{,}68 + 4\pi n, \approx 10{,}88 + 4\pi n]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

16. a)
$$\begin{aligned} \frac{\sec x}{\tan x} &= \operatorname{cosec} x \\ \cot x \sec x &= \operatorname{cosec} x \\ \frac{\cos x}{\sin x \cos x} &= \operatorname{cosec} x \\ \operatorname{cosec} x &= \operatorname{cosec} x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^2 x}{\cot^2 x} &= 1 - \cos^2 x \\ \tan^2 x \cos^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ 1 - \cos^2 x &= 1 - \cos^2 x \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} &= 1 \\ \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} (1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 &= 2\sec^2 x \\ 1 + 2\tan x + \tan^2 x + 1 - 2\tan x + \tan^2 x &= 2\sec^2 x \\ 2 + 2\tan^2 x &= 2\sec^2 x \\ 2(1 + \tan^2 x) &= 2\sec^2 x \\ 2\sec^2 x &= 2\sec^2 x \end{aligned}$$

e) $\tan x + \cot x = \sec x \operatorname{cosec} x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sec x \operatorname{cosec} x$$
$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \sec x \operatorname{cosec} x$$
$$\sec x \operatorname{cosec} x = \sec x \operatorname{cosec} x$$

f) $(\cos x + \sin x)(\sec x + \operatorname{cosec} x) = \sec x \operatorname{cosec} x + 2$

$$\cos x \sec x + \cos x \operatorname{cosec} x + \sin x \sec x + \sin x \operatorname{cosec} x = \sec x \operatorname{cosec} x + 2$$
$$\cot x + \tan x + 2 = \sec x \operatorname{cosec} x + 2$$
$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} + 2 = \sec x \operatorname{cosec} x + 2$$
$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} + 2 = \sec x \operatorname{cosec} x + 2$$
$$\sec x \operatorname{cosec} x + 2 = \sec x \operatorname{cosec} x + 2$$

g) $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$

$$\frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$$
$$\sin x - \cos x = \sin x - \cos x$$

h) $(\tan x + \sec x)^2 = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$
$$\left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$
$$\frac{(\sin x + 1)^2}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$
$$\frac{(\sin x + 1)^2}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$
$$\frac{(\sin x + 1)^2}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$
$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 136

17. **a)** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$. **b)** $x = \frac{^{-}\pi}{6} + 2\pi n$ et $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, où $n \in \mathbb{Z}$. **d)** Aucune valeur possible de x.

18. **a)** $x = \frac{^{-}\pi}{2} + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$. **b)** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, où $n \in \mathbb{Z}$. **c)** $x = \pi + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, où $n \in \mathbb{Z}$. **e)** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, où $n \in \mathbb{Z}$. **f)** $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

19. Longueur de l'arc de cercle : 3450 km ; circonférence du cercle : $(2\pi \times 1520)$ km, donc la mesure de l'arc de cercle est de $\frac{345}{152}$ rad.

20. **a)** La roue effectue 4 tours/s.

b) La vitesse de rotation de la valve est environ de 9,55 m/s.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 137

21. L'appareil est saturé à : $[0, \approx 0{,}0083]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}092, \approx 0{,}11]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}19, \approx 0{,}21]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}29, \approx 0{,}31]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}39, \approx 0{,}41]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}49, \approx 0{,}51]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}59, \approx 0{,}61]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}69, \approx 0{,}71]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}79, \approx 0{,}81]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}89, \approx 0{,}91]$ s $\cup$ $[\approx 0{,}99, 1]$ s.

22. Il s'agit de trouver les zéros de $h = 250 \cos \frac{\pi t}{15} + 125$ pour $t \in [0, 30]$ s.
$t = 20$ s et $t = 10$ s. Donc 20 s $-$ 10 s = 10 s.
L'avion prend 10 s pour remplir ses réservoirs d'eau.

23. La règle associée à cette situation est $y = 7 \sin \frac{5\pi}{9}x + 7$, où y représente la tension (en V) et x, le temps (en s).

a) Ce condensateur se décharge 2 millions de fois pendant son fonctionnement.

b) La diode est allumée pendant 2,4 millions de secondes, soit pendant 666 h 40 min.

c) Il s'écoule 3 s.

Vue d'ensemble (*suite*)

24. On cherche le zéro de $y = \cos x$ pour $x \in [0, 2]$, soit $x = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$. La longueur L de la lame est donc d'environ 1,57 mm.
Résoudre $\tan x = \cos x$ pour $x \in [0, 2]$.
On trouve $x \approx 0{,}67$.
$y \approx \tan 0{,}67$
$y \approx 0{,}79$
La hauteur H de la lame est environ de 0,79 mm.

25. a) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
$y = 10 \cos \pi\left(x + \frac{1}{6}\right)$, où y représente la position horizontale et x, le temps (en s).

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
$y = 10 \sin \pi\left(x + \frac{1}{6}\right)$, où y représente la position verticale et x, le temps (en s).

b) 1) $(5\sqrt{3}, 5)$ **2)** $(-5\sqrt{3}, -5)$

c) L'abscisse et l'ordonnée du point P seront égales au point $\frac{\pi}{4}$. Or, comme le rayon est ici égal à 10 m, les coordonnées de $\frac{\pi}{4}$ sont $\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}, \frac{10\sqrt{2}}{2}\right)$, soit $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$.
Résoudre l'équation $5\sqrt{2} = 10 \cos \pi\left(x + \frac{1}{6}\right)$ ou $5\sqrt{2} = 10 \sin \pi\left(x + \frac{1}{6}\right)$.
La première valeur qui vérifie ces équations est $\frac{1}{12}$ s. La seconde valeur est $\frac{1}{12} + 1$ s, donc $\frac{13}{12}$ s.
L'abscisse du point P est donc identique à son ordonnée à : $\frac{1}{12}$ s, $\frac{13}{12}$ s, $\frac{25}{12}$ s, $\frac{37}{12}$ s et $\frac{49}{12}$ s.

Vue d'ensemble (*suite*)

26. a) 1) $P = 30 \cos \frac{\pi}{4}(x - 4) + 210$ ou $P = 30 \sin \frac{\pi}{4}(x - 2) + 210$, où P représente la population de chevreuils et x, le temps écoulé (en années) depuis 2000.

2) $P = 4 \cos \frac{\pi}{4}(x - 5) + 20$ ou $P = 4 \sin \frac{\pi}{4}(x - 3) + 20$, où P représente la population de coyotes et x, le temps écoulé (en années) depuis 2000.

b) 1) En 2021, la population de chevreuils sera d'environ 231 bêtes.
2) En 2027, la population de coyotes sera de 20 bêtes.

c) 1) Du 1er septembre 2010 au 30 avril 2013, du 1er septembre 2018 au 30 avril 2021 et du 1er septembre 2026 au 30 avril 2029.
2) Puisque 24 est le nombre maximal de coyotes, la population de coyotes est toujours inférieure ou égale à 24 bêtes.

Banque de problèmes

1.
- Déterminer le temps que prend l'avion A pour effectuer un tour complet.
  $\frac{0{,}02}{1} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow x \approx 314{,}16$ s ou $x \approx 5{,}24$ min.
- Déterminer la distance parcourue par l'avion A en un tour.
  $4800 \times 5{,}24 \approx 25\,132{,}74$ m
- Déterminer l'aire du disque délimité par la trajectoire de l'avion A.
  Le rayon de la zone est de 4000 m, soit 4 km.
  $A = 16\pi$
  $\approx 50{,}27$ km^2
- Déterminer l'aire du disque délimité par la trajectoire de l'avion B.
  $50{,}27 + 32 \approx 82{,}27$ km^2
- Déterminer le rayon de la trajectoire de l'avion B.
  $\sqrt{82{,}27 \div \pi} \approx 5{,}12$ km
- Déterminer la circonférence du trajet de l'avion B.
  $2 \times \pi \times 5{,}12 \approx 32{,}15$ km

- Déterminer la distance que parcourt l'avion B en 1 h.
  L'avion B effectue une rotation en 5,24 min environ. Sa vitesse est donc de $32{,}15 \div 5{,}24 \times 60 \approx 368{,}44$ km/h.
  Il parcourt donc environ 368,44 km en 1 h.

2. Établir la règle associée à la force appliquée par chacun des pieds.
Pied droit : $f(x) = 30\sin 8(x - 10\pi) + 60$, où f représente la force appliquée par le pied droit (en N) et x, le temps (en s).
Pied gauche : $g(x) = {}^{-}30\sin 8(x - 10\pi) + 60$, où f représente la force appliquée par le pied gauche (en N) et x, le temps (en s).
Additionner les règles afin de déterminer la force totale appliquée par les pieds en fonction du temps.
$(f + g)(x) = 30\sin 8(x - 10\pi) + 60 + {}^{-}30\sin 8(x - 10\pi) + 60 = 120$
La force totale appliquée est constante et est égale à 120 N.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 141

3. • Établir la règle qui permet de déterminer le taux d'inflation en fonction du temps pour chacun des pays.
Si y représente le taux d'inflation (en %) et x, le temps (en années), on a :
Pays **A** : $y = {}^{-}\sin 0{,}5\pi x + 3$
Pays **B** : $y = 2\sin 0{,}5\pi x + 2{,}5$

• Déterminer les moments où la valeur du taux d'inflation sera la même pour les deux pays.

$$\begin{aligned} {}^{-}\sin 0{,}5\pi x + 3 &= 2\sin 0{,}5\pi x + 2{,}5 \\ 0{,}5 &= 3\sin 0{,}5\pi x \\ \frac{1}{6} &= \sin 0{,}5\pi x \end{aligned}$$

$0{,}5\pi x \approx 0{,}17$ et $0{,}5\pi x \approx 2{,}97$.

$x \approx 0{,}11$ et $x \approx 1{,}89$.

La période de la fonction associée à la variation du taux d'inflation est de 4 ans pour chacun des pays. Les taux d'inflation de ces deux pays sont donc identiques à environ 0,11 an, 1,89 an, 4,11 ans, 5,89 ans, 8,11 ans, 9,89 ans, 12,11 ans, 13,89 ans.
Donc, de 2015 à 2020, les taux d'inflation seront les mêmes en 2016, soit environ 8,11 ans après 2008, et en 2017, soit environ 9,89 ans après 2008.

4. Démontrer que l'expression ① est équivalente à l'expression ②.

$$\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{\sin x + \cos x} = \sec x \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{\frac{1}{\sec x} + \frac{1}{\operatorname{cosec} x}} = \sec x \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{\frac{(\sec x + \operatorname{cosec} x)}{(\sec x \operatorname{cosec} x)}} = \sec x \operatorname{cosec} x$$

$$(\sec x \operatorname{cosec} x)\,\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} = \sec x \operatorname{cosec} x$$

$$\sec x \operatorname{cosec} x = \sec x \operatorname{cosec} x$$

Banque de problèmes (*suite*)

Page 142

5. Établir la règle de la fonction qui correspond à la situation.
$y = \tan\frac{\pi}{8}(x - 4) + 1$, où y représente l'intensité du signal sonore (en dB) et x, le temps (en centièmes de seconde).

Déterminer les moments où l'intensité du signal est de 42 dB et de 56 dB.

$42 = \tan\frac{\pi}{8}(x - 4) + 1 \Rightarrow x \approx 7{,}94$ centièmes de seconde.

$56 = \tan\frac{\pi}{8}(x - 4) + 1 \Rightarrow x \approx 7{,}95$ centièmes de seconde.

L'intervalle de temps entre ces deux intensités est environ de 0,0002 s. Étant donné que le son se répète 750 fois au cours de la première minute, l'intensité du signal est d'au moins 42 dB pendant environ 0,12 s.

6. Récrire l'équation à l'aide des identités trigonométriques.

$$^{-}\sin^2 x - \cos^2 x = 6\cos x - 4$$
$$^{-}1(\sin^2 x + \cos^2 x) = 6\cos x - 4$$
$$\frac{1}{2} = \cos x$$

Les solutions de l'équation $\frac{1}{2} = \cos x$ sont : $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ et $x_2 = \frac{^{-}\pi}{3} + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de Gabriel ne font donc pas partie de l'ensemble-solution.

7. • Établir la règle associée à cette situation.

La période de cette situation est de 365. Le jour 0 peut être considéré comme le 21 juin.

La règle de cette situation est $y = 12\cos\frac{2\pi}{365}x + 12$, où y représente le temps d'ensoleillement (en h) et x, le temps (en jours).

• Déterminer le nombre d'heures d'ensoleillement le 31 octobre.

Ce jour est le 132e après le 21 juin. $y = 12\cos\frac{2\pi}{365} \times 132 + 12$

Le 31 octobre, il y aura environ 4,26 h d'ensoleillement.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 143

8. • Établir la règle associée à cette situation.

La période est de 40 min. Le paramètre b vaut donc $\frac{\pi}{20}$. Le paramètre a vaut 2, car $\frac{102 - 98}{2} = 2$.

Le paramètre k vaut ainsi 100. De plus, la courbe passe par le point (0, 101). En substituant ces valeurs dans l'équation $y = \mathrm{a}\sin\mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$, on obtient : $101 = 2\sin\frac{\pi}{20}(0 - \mathrm{h}) + 100$.

Résoudre cette dernière équation pour déterminer la valeur du paramètre h.

Les deux valeurs obtenues sont $\mathrm{h} = \frac{^{-}10}{3}$ et $\mathrm{h} = \frac{^{-}25}{3}$. Étant donné qu'au départ la pression doit être à la hausse, la valeur du paramètre h est $\frac{^{-}10}{3}$.

La règle est donc : $y = 2\sin\frac{\pi}{20}\left(x + \frac{10}{3}\right) + 100$, où y représente la pression (en kPa) et x, le temps (en min).

• Déterminer la pression atmosphérique à 233 min.
La pression est de 98,91 kPa à 233 min.
Il est donc possible de déterminer la pression 233 min après le début de l'expérience.

9. • Établir la règle de la fonction associée à cette situation.

Remplacer les valeurs connues dans la règle de la forme $y = \mathrm{a}\sin\mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$ afin de déterminer la valeur du paramètre a.

$$y = \mathrm{a}\sin\mathrm{b}(x - \mathrm{h}) + \mathrm{k}$$
$15\sqrt{2} + 50 = \mathrm{a}\sin 0{,}5\pi(3{,}5 - 1) + 50$. La valeur du paramètre a est donc $^{-}30$.

• Résoudre l'inéquation $^{-}30\sin 0{,}5\pi(x - 1) + 50 \geq 60$

L'intensité lumineuse est donc supérieure ou égale à 60 % entre : $[0, \approx 0{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 3{,}22, \approx 4{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 7{,}22, \approx 8{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 11{,}22, \approx 12{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 15{,}22, \approx 16{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 19{,}22, \approx 20{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 23{,}22, \approx 24{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 27{,}22, \approx 28{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 31{,}22, \approx 32{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 35{,}22, \approx 36{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 39{,}22, \approx 40{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 43{,}22, \approx 44{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 47{,}22, \approx 48{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 51{,}22, \approx 52{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 55{,}22, \approx 56{,}78]$ s $\cup$ $[\approx 59{,}22, 60]$ s.

10. Pour obtenir les renseignements nécessaires pour établir la règle de la réciproque, il est possible d'intervertir les coordonnées x et y. Le nouveau domaine correspond à une demi-période, donc la période est de 12.
La valeur du paramètre b est donc $\frac{\pi}{6}$. Le nouveau codomaine fournit des renseignements sur les valeurs des paramètres a et k. Ceux-ci valent respectivement 2 et 2,5. Enfin, le paramètre h vaut 5, car les extremums sont situés aux points (2, 0,5) et (8, 4,5). La règle de la fonction sinus dont la réciproque est représentée graphiquement est donc $y = 2\sin\frac{\pi}{6}(x - 5) + 2{,}5$.