VISION 4 | Les fonctions exponentielles et logarithmiques

RÉVISION 4

Réactivation 1

Page 212

a. 1) 500 000 L/km^2
2) $500\,000(0,5)^6 = 7812,5$ L/km^2
3) $500\,000(0,5)^{24} \approx 0,03$ L/km^2
4) $500\,000(0,5)^{72} \approx 1,06 \times 10^{-16}$ L/km^2

b. 7 h après le déversement.

c. 1) 10 h après le déversement.
2) $500\,000 \div 1024 \approx 488,28$ L/km^2

Réactivation 2

Page 213

a. Le nombre de grains de blé double d'une case à l'autre.

b. 1) 512 grains de blé.
2) 524 288 grains de blé.
3) 134 217 728 grains de blé.
4) $9,2234 \times 10^{18}$ grains de blé.

c. $131\,072 = 2^{x-1}$

$x - 1 = \log_2 131\,072$

$x - 1 = \dfrac{\log 131\,072}{\log 2}$

$x - 1 = 17$

$x = 18$

Sur la 18^e case.

d. Salaire journalier d'une personne en fonction du temps

Journée de travail	1re	2^e	3^e	4^e	5^e
Salaire ($)	0,01	**0,03**	**0,09**	**0,27**	**0,81**

e. $196,83 = 0,01(3)^{x-1}$

$19\,683 = 3^{x-1}$

$x - 1 = \log_3 19\,683$

$x - 1 = \dfrac{\log 19\,683}{\log 3}$

$x - 1 = 9$

$x = 10$

À la 10^e journée de travail.

f. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
La patronne devrait refuser, puisque le salaire de cette personne deviendra rapidement beaucoup trop élevé. Par exemple, uniquement pour la 15^e journée de travail, cette personne recevra 47 829,69 $.

Mise à jour

Page 216

1. a) -5^4 **b)** $3^2 \times 7^3$ **c)** $2^5 \times 3^2 \times 5^1$
d) -2^{10} **e)** $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3$ **f)** $2^4 \times 3^5$

2. A, B, C, D, E, F, H, K, L

3. a) 2^7 **b)** 2^9 **c)** 2^6 **d)** 2^3 **e)** 2^0 **f)** 2^{10} **g)** 2^{-6} **h)** 2^{-11}

4. a) $\log_6 216 = 3$ **b)** $4^{-3} = \frac{1}{64}$ **c)** $\log_{\frac{1}{5}} 625 = -4$

d) $0{,}5^5 = \frac{1}{32}$ **e)** $\log_8 4096 = x$ **f)** $2^{-5} = x$

g) $\log_x 65\,538 = -8$ **h)** $0{,}1^{3x} = 1000$ **i)** $\log_{12} 5x = 2$

5. 1 B, 2 D, 3 A, 4 E, 5 C

Mise à jour (*suite*)

6. a) $x = 4$ **b)** $x = \pm 9$ **c)** $x = 343$ **d)** $x = 9$ **e)** $x = 6$ **f)** $x = 1728$

g) $x = 9$ **h)** $x = -7$ **i)** $x = -1$ **j)** $x = \frac{1}{9}$ **k)** $x = -5$ **l)** $x = -\frac{1}{6}$

7. a) a^7 **b)** a^7 **c)** 2^{3a} **d)** a^{-2} ou $\left(\frac{1}{a}\right)^2$.

e) 3^{a+4} **f)** a^{2b+1} **g)** a^3 **h)** a^0 ou 1, si $a \neq 0$.

8. a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{5^2}$ ou $\sqrt[3]{25}$. **c)** $\sqrt[5]{2^4}$ ou $\sqrt[5]{16}$.

d) $\sqrt{7^5}$ ou $\sqrt{16\,807}$. **e)** $\sqrt{3^3}$ ou $\sqrt{27}$. **f)** $\sqrt{6}$

9. a) $3^{\frac{1}{2}}$ **b)** $9^{\frac{1}{3}}$ ou $3^{\frac{2}{3}}$. **c)** $5^{\frac{2}{5}}$ ou $25^{\frac{1}{5}}$. **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ou $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$. **e)** $5^{-\frac{1}{6}}$ **f)** $8^{\frac{1}{4}}$ ou $2^{\frac{3}{4}}$.

10. B si $a \neq 0$, C et F si $a \neq 0$.

11. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^8$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **c)** 3^3 **d)** 5^3 **e)** $-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$ **f)** 5^3

Mise à jour (*suite*)

12. a) $a = 4$ **b)** $a = 2$ **c)** $a = \pm 3$

d) $a = 8$ **e)** $a = 2$ **f)** $a = \pm 2$

13. a) $4a^6$ **b)** $-10a^7$ **c)** $\frac{25}{4}a^{16}$ **d)** $\frac{10}{a^2}$ **e)** $5a^{12} + 2a^3$

f) $5a^5b^2$ **g)** $36a$ **h)** $\frac{64b^6\sqrt{a}}{9}$ **i)** $89ab^2$

14. Non. La pyramide de gauche a une aire de $x^2 + 4 \times \frac{x \times 2x}{2} = 5x^2$, tandis que celle de droite a une aire de $(2x)^2 + 4 \times \frac{2x \times x}{2} = 8x^2$.

15. a) **Quantité de lumière selon la profondeur**

Profondeur (cm)	Quantité de lumière (%)	Quantité de lumière bloquée (%)
0	100	0
2	95	5
4	90,25	**9,75**
6	**≈ 85,74**	**≈ 14,26**
8	**≈ 81,45**	**≈ 18,55**

b) $100(0{,}95)^{\frac{20}{2}}$, soit ≈ 59,87 % de lumière.

c) 1) Non, car seulement $100 - 100(0{,}95)^{\frac{115}{2}} \approx 94{,}76$ % de la lumière est bloquée.

2) Non, car seulement $100 - 100(0{,}95)^{\frac{116}{2}} \approx 94{,}90$ % de la lumière est bloquée.

3) Oui, car $100 - 100(0{,}95)^{\frac{117}{2}} \approx 95{,}02$ % de la lumière est bloquée.

16. a) $150\,000(1{,}02)^5 \approx 165\,612{,}12$ \$ **b)** $150\,000(1{,}02)^{12} \approx 190\,236{,}27$ \$

Mise à jour (*suite*)

17. Le temps requis pour :

- le krypton 85 est de 3 × 10,7 = 32,1 années ;
- le plutonium 239 est de 3 × 24 000 = 72 000 années ;

- l'iode 129 est de $3 \times 1,7 \times 10^7 = 5,1 \times 10^7$ années ;
- l'uranium 235 est de $3 \times 7,1 \times 10^8 = 2,13 \times 10^9$ années ;
- l'uranium 238 est de $3 \times 4,5 \times 10^9 = 1,35 \times 10^{10}$ années.

18. a) **Nombre de visiteurs du site en fonction du temps**

Temps (jours)	Nombre de visiteurs
0	1
1	3
2	9
3	27
4	**81**
5	**243**
6	**729**

b) 1) $3^8 = 6561$ visiteurs. **2)** $3^{12} = 531\ 441$ visiteurs.
3) $3^{15} = 14\ 348\ 907$ visiteurs. **4)** 3^n visiteurs.

19. a) 45 000 articles. **b)** $\approx$ 26 572 articles. **c)** $50\ 000(0,9)^{n-1}$ articles.

20. a) 256 plantes. **b)** 1024 cm^2 **c)** $\approx$ 99,18 m^2

SECTION 4.1 La fonction exponentielle

Problème

Page 220

Plusieurs réponses possibles. Exemple :

La règle de la fonction associée au nuage de points est $y \approx 0,5(1,02)^x + 0,5$, où y représente le risque d'avoir un accident (en %) et x, l'alcoolémie (en mg d'alcool/100 mL de sang). À 180 mg d'alcool/100 mL de sang, le risque d'avoir un accident est environ de 18,16 % pour une personne de 30 ans et plus. Le risque pour une personne de 16 ans est donc d'environ 36,32 %. Le risque d'avoir un accident pour un conducteur de 35 ans qui n'a rien consommé est de 1 %. Le risque d'avoir un accident pour un conducteur de 16 ans est donc environ 36,32 fois plus élevé.

Activité 1

Page 221

a. 50 N

b. La force exercée par le bras robotique diminue de moins en moins rapidement.

c. **Force exercée par un bras robotique selon le temps**

Temps (s)	Calcul	Force (N)
0	$50 \times 0,8^0$	50
4	$50 \times 0,8 = 50 \times 0,8^1 = 50 \times 0,8^{\frac{4}{4}}$	40
8	$50 \times 0,8 \times 0,8 = 50 \times 0,8^2 = 50 \times 0,8^{\frac{8}{4}}$	32
12	$50 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 = 50 \times 0,8^3 = 50 \times 0,8^{\frac{12}{4}}$	**25,6**
16	$\mathbf{50 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 = 50 \times 0,8^4 = 50 \times 0,8^{\frac{16}{4}}}$	**20,48**
20	$\mathbf{50 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 = 50 \times 0,8^5 = 50 \times 0,8^{\frac{20}{4}}}$	**16,384**
24	$\mathbf{50 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 = 50 \times 0,8^6 = 50 \times 0,8^{\frac{24}{4}}}$	**13,1072**
…	…	…
n	$\mathbf{50 \times 0,8^{\frac{n}{4}}}$	

d. Par $0{,}8^{12}$.

e. La courbe se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses sans jamais y toucher.

Activité 2

Page 222

a. Hauteur des balles par rapport au sol en fonction du nombre de bonds

Nombre de bonds	0	6	12	18
Hauteur de la balle A (m)	**2,7**	**≈ 1,81**	**≈ 1,34**	**≈ 1,09**
Hauteur de la balle B (m)	**3**	**≈ 1,67**	**≈ 1,32**	**≈ 1,23**

b. La règle est $h = 1{,}8(0{,}512)^{\frac{n}{3}} + 1{,}2$.

c. Oui, cette déduction est exacte. Les lois des exposants permettent les calculs suivants.
$h = 1{,}9(0{,}81)^{\frac{n}{2}} + 0{,}8 = 1{,}9(0{,}81^{\frac{1}{2}})^n + 0{,}8 = 1{,}9(0{,}9)^n + 0{,}8$

d. $h = 1{,}8(0{,}512)^{\frac{n}{3}} + 1{,}2 = 1{,}8(0{,}512^{\frac{1}{3}})^n + 1{,}2 = 1{,}8(0{,}8)^n + 1{,}2$

Activité 3

Page 223

a. **Valeur d'un placement selon la période de calcul des intérêts**

Nombre de périodes par année	Intérêts calculés à chaque période (%)	Calculs	Valeur du placement à la fin de l'année ($)
1 (annuellement)	100	1×2	2
2 (semestriellement)	50	$1 \times 1{,}5^2$	2,25
4 (trimestriellement)	25	$1 \times 1{,}25^4$	**≈ 2,44**
12 (mensuellement)	**$8{,}\overline{3}$**	**$1 \times (1{,}08\overline{3})^{12}$**	**≈ 2,61**
52 (chaque semaine)	**≈ 1,92**	**$1 \times 1{,}0192^{52}$**	**≈ 2,69**
365 (chaque jour)	**≈ 0,27**	**$1 \times 1{,}0027^{365}$**	**≈ 2,71**
8760 (chaque heure)	**≈ 0,01**	**$1 \times 1{,}0001^{8760}$**	**≈ 2,72**
n	$\frac{100}{n}$	$1 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	

b. **1)** 2 **2)** 2,25 **3)** ≈ 2,44 **4)** ≈ 2,61 **5)** ≈ 2,69 **6)** ≈ 2,71 **7)** ≈ 2,72

c. Ce sont les mêmes résultats.

d. Vers une valeur d'environ 2,7183.

e. C'est la même valeur qu'à la question **d.**

f. ≈ 2,72 $

Technomath

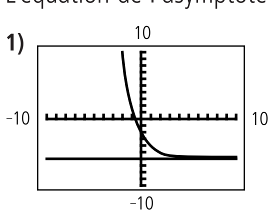
Page 224

a. Y_1 : a = 1,5 et k = 4 ; Y_2 : a = 0,5 et k = 2 ; Y_3 : a = −0,2 et k = −1.

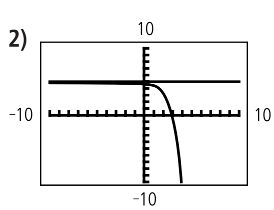
b. **1)** $y = 4$ **2)** $y = 2$ **3)** $y = -1$

c. L'équation de l'asymptote de la courbe associée à une fonction exponentielle est $y = $ k.

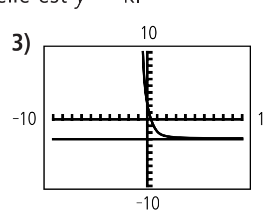
d. **1)**



2)



3)



Mise au point 4.1

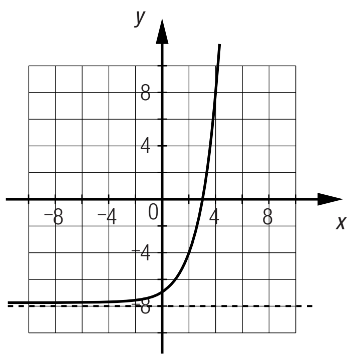
1. a) $f(x) = 80(2)^x + 8$ b) $f(x) = -0{,}2(25)^x + 3$ c) $f(x) = 2000(10)^x - 100$
   d) $f(x) = 16(0{,}0625)^x$ e) $f(x) = \frac{1}{16\ 807}(343)^x - 5$ f) $f(x) = 3125(25)^x$

2. A 2, B 1, C 1, D 2, E 2, F 1

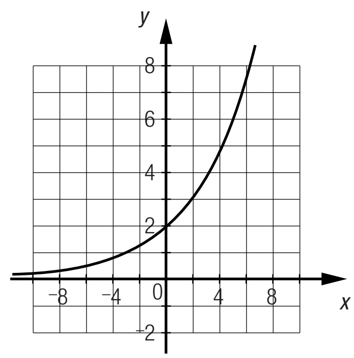
3. a) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]8, +\infty[$. 2) 9 3) $y = 8$ 4) Croissante : $\mathbb{R}$.
   b) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, -5[$. 2) -7 3) $y = -5$ 4) Croissante : $\mathbb{R}$.
   c) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-100, +\infty[$. 2) $\approx -99{,}996$ 3) $y = -100$ 4) Décroissante : $\mathbb{R}$.
   d) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-2, +\infty[$. 2) $-1{,}75$ 3) $y = -2$ 4) Décroissante : $\mathbb{R}$.
   e) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-8, +\infty[$. 2) $-7{,}75$ 3) $y = -8$ 4) Croissante : $\mathbb{R}$.
   f) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 4[$. 2) $3{,}875$ 3) $y = 4$ 4) Décroissante : $\mathbb{R}$.

Mise au point 4.1 (*suite*)

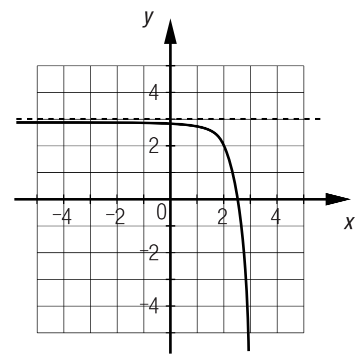
4. a)



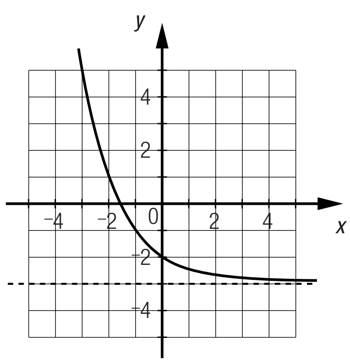
b)



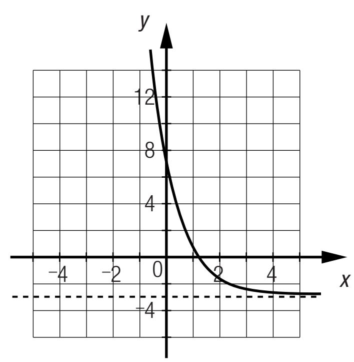
c)



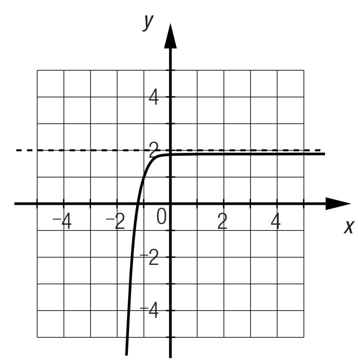
d)



e)



f)



5. a) $f(x) = -8(5)^x + 6$ b) $f(x) = -15(0{,}1)^x + 9$ c) $f(x) = 16(4)^x - 8$

6. a) $f(x) = 20(100)^x + 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^x + 4$ c) $f(x) = 2{,}5(4)^x - 5$
   d) $f(x) = 50(10)^x - 60$ e) $f(x) = -64(2)^x + 45$ f) $f(x) = 2(100)^x - 12$

7. a) 1) $(f \times g)(x) = 2^{3x} \times -0{,}25(2)^{x+5}$
   $= 2^{3x} \times -0{,}25 \times 2^x \times 2^5$
   $= -0{,}25(2)^{4x+5}$
   2) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2^{3x}}{-0{,}25(2)^{x+5}}$
   $= -4 \times 2^{3x - (x+5)}$
   $= -4(2)^{2x-5}$
   b) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 0[$. 2) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 0[$.

Mise au point 4.1 (*suite*)

8. a) Décroissante. b) Croissante. c) Décroissante.
   d) Croissante. e) Croissante. f) Croissante.

9. a) -16 °C b) $\approx -6{,}6$ °C c) $\approx 3{,}38$ °C d) $\approx 17{,}79$ °C

10. a) **1)** $f(x) = 4(6)^x$ **2)** $f(x) = 3(1,5)^x$ **3)** $f(x) = {}^-3^x$ **4)** $f(x) = 2(0,5)^x$

b) **1)** $f(x) = 3(2)^x + 7$ **2)** $f(x) = 10(5)^x - 15$ **3)** $f(x) = 0,5(10)^x + 300\ 000$ **4)** $f(x) = 3(4)^x - 5$

Mise au point 4.1 (*suite*)

11. a) ≈ 29,53 % **b)** ≈ 50,34 % **c)** ≈ 82,62 %

12. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Peu importe l'avancement de la technologie médicale, le nombre de décès d'enfants en bas âge au Québec sera toujours supérieur à 150 décès par année.

b) $N \approx 800(0,92)^t + 150$, où N correspond au nombre de décès et t, au temps écoulé (en années) depuis 1980.

c) **1)** ≈ 178 décès. **2)** ≈ 152 décès.

13. a) **1)** 13,5 V **2)** ≈ 3,5 V

b) Cette fonction est décroissante.

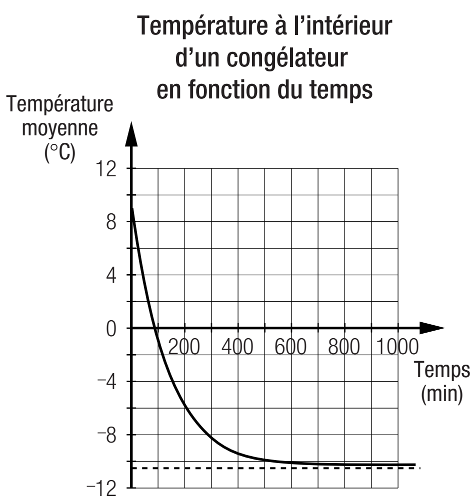
c) Domaine : [0, 216] jours ; codomaine : $[4,87 \times 10^{-8}, 13,5]$ V.

14. a) **1)** ≈ 740,12 $ **2)** ≈ 742,97 $ **3)** ≈ 745,68 $

b) Pour un même taux d'intérêt annuel, plus les intérêts sont composés souvent, plus la valeur du placement à l'échéance est élevée.

Mise au point 4.1 (*suite*)

15. a)



b) **1)** $y = {}^-10,5$

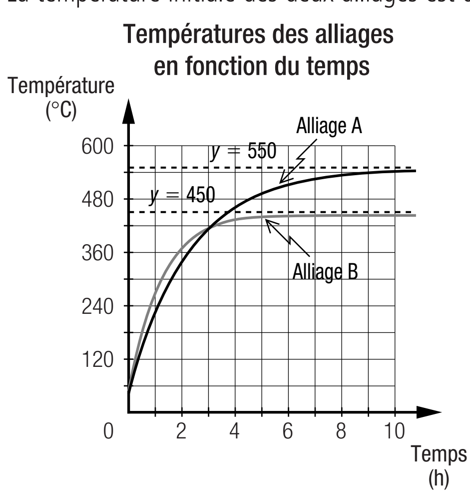
2) Même si théoriquement cette température ne sera jamais atteinte, c'est la température « minimale » du congélateur.

c) $]^-10,5, 9]$ °C

d) 9 °C

16. a) La température initiale des deux alliages est de 50 °C.

b)



c) **1)** La température des deux alliages est la même à environ 3,03 h.

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Non, car la température de 550 °C correspond à l'asymptote de la courbe associée à la fonction qui permet de calculer la température de l'alliage.

3) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Non, car la température de 450 °C correspond à l'asymptote de la courbe associée à la fonction qui permet de calculer la température de l'alliage.

17. a) Les règles sont $V_A = {}^-1100(0,65)^t + 1500$ et $V_B = {}^-1300(0,75)^t + 1700$, où V_A et V_B correspondent respectivement à la valeur (en $) des actions de l'investisseuse A et à celle des actions de l'investisseuse B, et *t*, au temps écoulé (en jours) depuis l'achat des actions.

b) 1) ≈ 19,14 $ **2)** ≈ 104,90 $ **3)** ≈ 165,08 $

c) La valeur maximale des actions de l'investisseuse A est environ 1499,98 $ et celle des actions de l'investisseuse B est environ 1699,02 $.

Mise au point 4.1 (*suite*)

Page 232

18. a) Les règles sont $P_A = {}^-4000(0,8)^t + 6000$ et $P_B = {}^-6000(0,8)^t + 7000$, où P_A et P_B correspondent respectivement à la production journalière (en kg/jour) de la mine **A** et à celle de la mine **B,** et *t*, au temps (en jours).

b) **Production journalière des mines en fonction du temps**

Temps (jours)	0	1	2	3	4	5
Production journalière de la mine A (kg/jour)	**2000**	**2800**	**3440**	**3952**	**4361,6**	**4689,28**
Production journalière de la mine B (kg/jour)	**1000**	**2200**	**3160**	**3928**	**4542,4**	**5033,92**
Production journalière totale (kg/jour)	**3000**	**5000**	**6600**	**7880**	**8904**	**9723,2**

c) La règle est $P_T = {}^-10\ 000(0,8)^t + 13\ 000$.

d) 1) 6600 kg/jour. **2)** 9723,2 kg/jour. **3)** ≈ 12 648,16 kg/jour. **4)** ≈ 12 987,62 kg/jour.

SECTION 4.2 La fonction logarithmique

Problème

Page 233

Réciproque :

$$R = {}^-120(0,99)^{0,55c} + 120$$
$$R - 120 = {}^-120(0,99)^{0,55c}$$
$$\frac{R-120}{{}^-120} = 0,99^{0,55c}$$
$$0,55c = \log_{0,99}\frac{R-120}{{}^-120}$$
$$c = \frac{20}{11}\log_{0,99}\frac{R-120}{{}^-120}$$

Activité 1

Page 234

a. À une fonction exponentielle.

b. **Évolution du nombre de visiteurs dans le parc en fonction du temps**

Temps (années)	Nombre de visiteurs
0	**3000**
1	**4106**
2	**4967**
3	**5638**
4	**6161**
5	**6567**
6	**6884**

c. Le nombre de visiteurs augmente de moins en moins rapidement.

d. 1) $\approx$ 7131 visiteurs. **2)** $\approx$ 7849 visiteurs.

e. Ces deux graphiques représentent des fonctions réciproques entre elles puisqu'ils sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

f. 1) f^{-1} **2)** f

Technomath

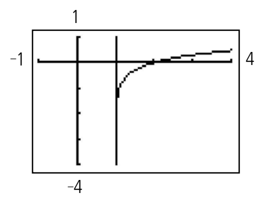
Page 235

a. Y_1 : b = 1 et h = 2,4 ; Y_2 : b = 2 et h = −1,8 ; Y_3 : b = −2 et h = −4,2.

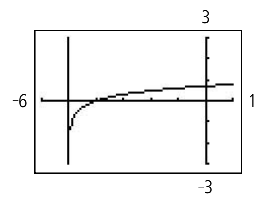
b. 1) $x = -4{,}2$ **2)** $x = -1{,}8$ **3)** $x = 2{,}4$

c. L'équation de l'asymptote verticale associée à une fonction logarithmique dont la règle s'écrit sous la forme $y = \log b(x - h)$ est $x = h$.

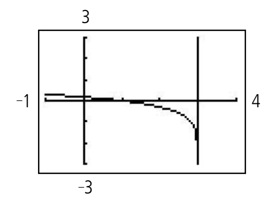
d. 1)



2)



3)



Mise au point 4.2

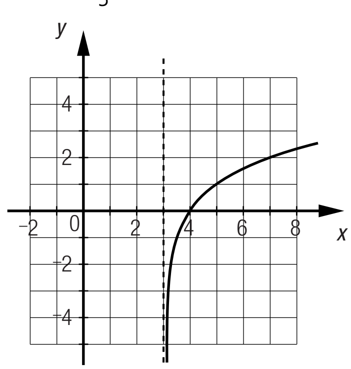
Page 238

1. a) $x = 6$ **b)** $x = 10\,000$ **c)** $x = -3$ **d)** $x = 1{,}5$
e) $x = 10$ **f)** $x = \frac{1}{121}$ **g)** $x = 6$ **h)** $x = \sqrt[5]{225}$

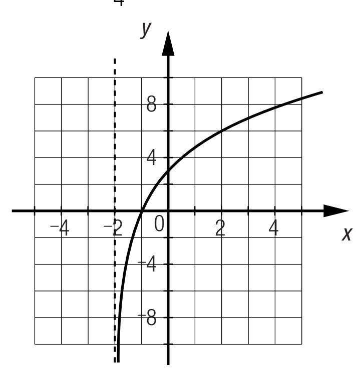
2. a) $f^{-1}(x) = \log_8 \frac{x}{5}$ **b)** $g^{-1}(x) = \log_{\frac{3}{4}}(x - 9)$ **c)** $h^{-1}(x) = \ln\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$
d) $i^{-1}(x) = \log\left(-\frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\right) + 7$ **e)** $j^{-1}(x) = \frac{5}{2}\log_{\frac{5}{9}}\frac{20x}{119}$ **f)** $k^{-1}(x) = 4\ln\frac{x}{60}$

3. a) $f^{-1}(x) = 8^{\frac{x}{12}}$ **b)** $g^{-1}(x) = 10^x - 5$ **c)** $h^{-1}(x) = e^{\frac{2x}{25}}$
d) $i^{-1}(x) = \frac{1}{3}(4)^{\frac{5x}{3}} + 4$ **e)** $j^{-1}(x) = -\frac{5}{4}e^{2x}$ **f)** $k^{-1}(x) = \frac{1}{2}(10)^{\frac{-x-2}{5}} - 4$

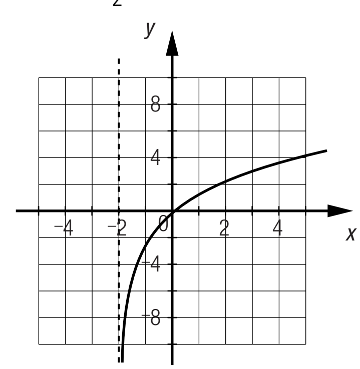
4. a)



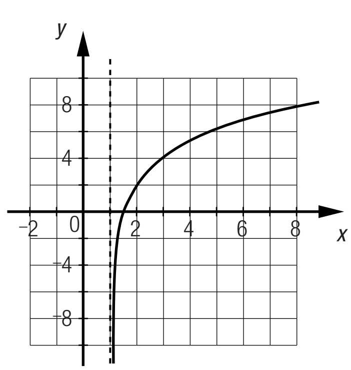
b)



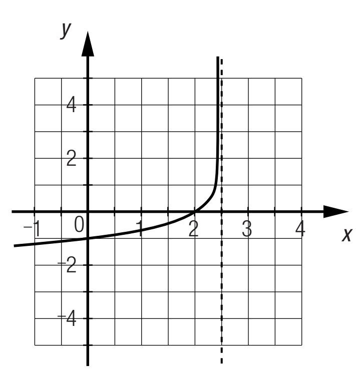
c)



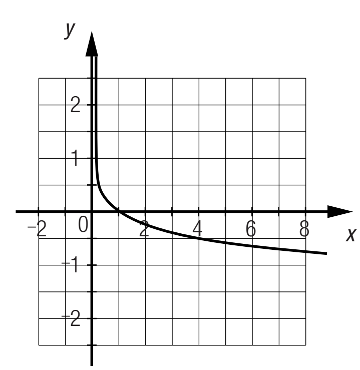
d)



e)



f)



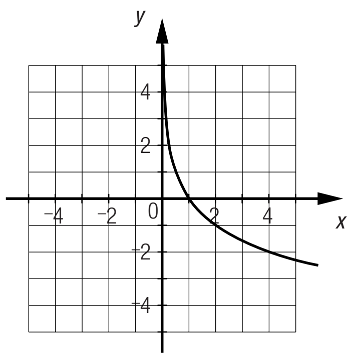
5. A 1, B 1, C 2, D 1, E 2, F 2

Mise au point 4.2 (*suite*)

6. a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$ **b)** $f(x) = \log_2(^-x + 2)$ **c)** $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x + 8)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}2x$ **e)** $f(x) = \log_{16}\left(\frac{2}{3}(x + 2)\right)$ **f)** $f(x) = \log(^-1{,}25(x - 12))$

7. a) Les deux courbes sont superposées.



b)
$$\begin{aligned} y &= {^-\log_2 x} \\ ^-y &= \log_2 x \\ 2^{-y} &= x \\ \left(\frac{1}{2}\right)^y &= x \\ y &= \log_{\frac{1}{2}} x \end{aligned}$$

8. a) 1) Domaine : $]^-16, +\infty[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** 2 **3)** $x = {^-16}$ **4)** Croissante : $]^-16, +\infty[$.

b) 1) Domaine : $]^-\infty, 2[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** 2 **3)** $x = 2$ **4)** Décroissante : $]^-\infty, 2[$.

c) 1) Domaine : $]^-2, +\infty[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** $\approx {^-4{,}15}$ **3)** $x = {^-2}$ **4)** Décroissante : $]^-2, +\infty[$.

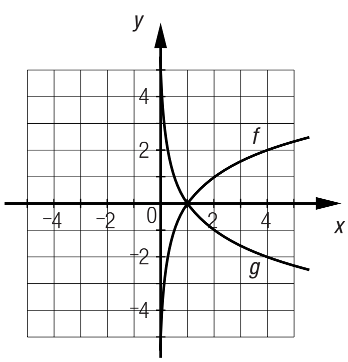
d) 1) Domaine : $]^-4, +\infty[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** 2 **3)** $x = {^-4}$ **4)** Croissante : $]^-4, +\infty[$.

e) 1) Domaine : $]^-\infty, 2[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** $\approx 0{,}14$ **3)** $x = 2$ **4)** Croissante : $]^-\infty, 2[$.

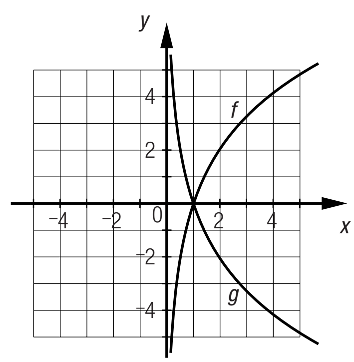
f) 1) Domaine : $]^-\infty, 13{,}5[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** $^-15$ **3)** $x = 13{,}5$ **4)** Croissante : $]^-\infty, 13{,}5[$.

Mise au point 4.2 (*suite*)

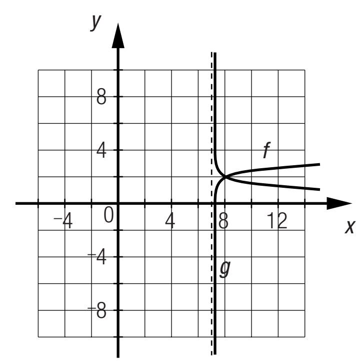
9. a) 1)



2)



3)



b) 1) Une réflexion par rapport à l'axe des x. **2)** Une réflexion par rapport à l'axe des x.

3) Une réflexion par rapport à l'axe d'équation $y = 2$.

10. a) $\approx 27{,}38$ MJ

b) 1)
$$\begin{aligned} E &= 10e^{\frac{v}{4095}} - 10 \\ E + 10 &= 10e^{\frac{v}{4095}} \\ \frac{E + 10}{10} &= e^{\frac{v}{4095}} \\ \ln\left(\frac{E + 10}{10}\right) &= \frac{v}{4095} \\ v &= 4095\ln\left(\frac{E + 10}{10}\right) \\ v &= 4095\ln 0{,}1(E + 10) \end{aligned}$$

2) $\approx 7337{,}26$ tours/min.

11. a) 31 000 blogues.

b) La règle est $b = 1000(10)^t + 30\ 000$, où b correspond au nombre de blogues et t, au temps écoulé (en années) depuis 1990.

c) **1)**

$$\begin{aligned} b &= 1000(10)^t + 30\,000 \\ b - 30\,000 &= 1000(10)^t \\ \frac{b - 30\,000}{1000} &= 10^t \\ t &= \log \frac{b - 30\,000}{1000} \end{aligned}$$

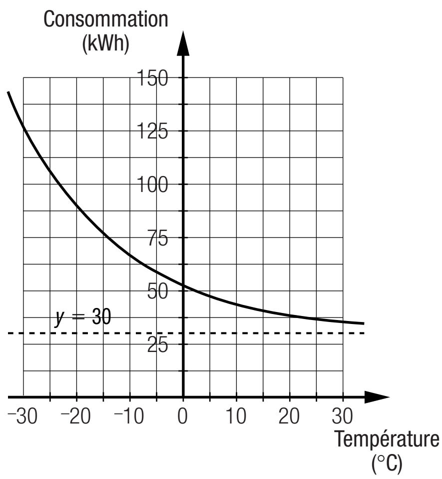
La règle de la réciproque est $t = \log \frac{b - 30\,000}{1000}$, où t correspond au temps écoulé (en années) depuis 1990 et b, au nombre de blogues.

2) Environ 2,67 ans après le début de l'année 1990.

Mise au point 4.2 (*suite*)

Page 241

12. a) Consommation moyenne journalière d'électricité en fonction de la température extérieure



b) **1)**

$$\begin{aligned} C &= 22e^{-0,05t} + 30 \\ C - 30 &= 22e^{-0,05t} \\ \frac{C - 30}{22} &= e^{-0,05t} \\ \ln\frac{C - 30}{22} &= -0,05t \\ t &= -20 \ln\frac{C - 30}{22} \end{aligned}$$

2) $\approx -24,26$ °C

13. a) **1)** $\approx 10,35$ min **2)** $\approx 23,26$ min **3)** $\approx 44,33$ min

b) **1)** $x = 337e^{-0,005T} - 300$ **2)** $\approx -198,50$ °C

14. a) D'environ 358 352 m^3 de sable à environ 548 480 m^3 de sable.

b) **1)**

$$\begin{aligned} Q &= \ln(10t + 1) \\ e^Q &= 10t + 1 \\ e^Q - 1 &= 10t \\ \frac{e^Q - 1}{10} &= t \\ t &= 0,1e^Q - 0,1 \end{aligned}$$

2) $\approx 14,74$ mois.

Mise au point 4.2 (*suite*)

Page 242

15. a) La règle est $Q = \log -50(t - 9)$, où Q correspond à la quantité d'eau (en hL) et t, au temps (en années).

b) $\approx 2,65$ hL

c) $\approx 1,7$ hL

16. a) $[H^+] = 10^{-(pH)}$

b) **Caractéristiques de certains liquides**

Liquide	$[H^+]$ (mol/L)	pH
Lait	**≈ 1,74 × 10^{-7}**	6,76
Jus d'orange	1,95 × 10^{-4}	**≈ 3,71**
Eau de Javel	1,78 × 10^{-13}	**≈ 12,75**
Café	**≈ 1,29 × 10^{-5}**	4,89
Sang humain	4,57 × 10^{-8}	**≈ 7,34**
Acides gastriques	6,17 × 10^{-2}	**≈ 1,21**
Eau distillée	**1 × 10^{-7}**	7
Thé	**≈ 3,16 × 10^{-6}**	5,5

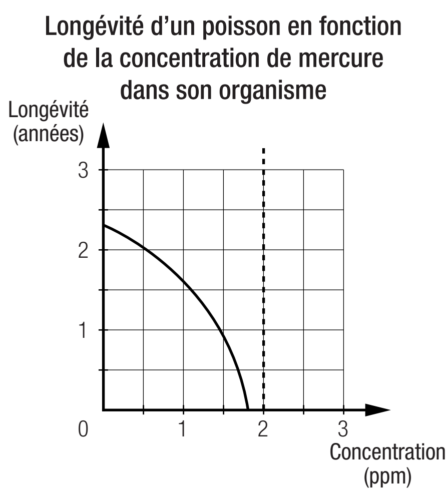
Mise au point 4.2 (*suite*)

Page 243

17. **Intensité d'un son en fonction de la pression acoustique**

Nature du son	Pression (Pa)	Intensité (dB)	Perception
Tonnerre	11,25	**≈ 115,00**	**Dangereuse**
Sirène de pompiers	35,56	**≈ 125,00**	**Insupportable**
Conversation normale	0,02	**60**	**Normale**
Abords d'une autoroute achalandée	1,12	**≈ 94,96**	**Douloureuse**
Discothèque	5,02	**≈ 107,99**	**Dangereuse**
Concert rock	63,25	**≈ 130,00**	**Insupportable**

18. a)



b) 1) La longévité de ce poisson est environ de 2,30 ans.

2) La longévité de ce poisson est environ de 0,92 an.

c) 1)

$$L = \ln(^-5c + 10)$$
$$e^L = {}^-5c + 10$$
$$e^L - 10 = {}^-5c$$
$$c = \frac{e^L - 10}{^-5}$$
$$c = {}^-0{,}2e^L + 2$$

La règle de la réciproque est $c = {}^-0{,}2e^L + 2$.

2) On ne peut pas déterminer la concentration de mercure, car la longévité maximale d'un poisson est environ de 2,30 ans.

Les situations exponentielles et logarithmiques

Problème

Page 244

Plusieurs réponses possibles. Exemple :

- Les couples de la table de valeurs montrent une tendance exponentielle.
- Recherche de la règle qui est de la forme $y = \mathrm{a}c^x + \mathrm{k}$.
  D'après la table de valeurs, on peut déduire que $\mathrm{k} = 4$ et que $\mathrm{a} + 4 = 6{,}8$, donc $\mathrm{a} = 2{,}8$. En substituant un autre couple de la table de valeurs à x et à y, on obtient $\mathrm{c} \approx 0{,}95$. La règle est donc $y \approx 2{,}8(0{,}95)^x + 4$, où y est le pH et x, le temps d'affinage.
- À l'aide d'une table de valeurs, on cherche les valeurs de x pour lesquelles le pH se situe entre 4,8 et 5,2.

Le temps d'affinage est compris entre environ 16,52 jours et environ 24,42 jours.

Activité 1

Page 245

a. On peut passer :
- de l'étape ① à l'étape ②, puisque $m = c^n$;
- de l'étape ② à l'étape ③, par la loi des exposants $(c^n)^x = c^{xn}$;
- de l'étape ③ à l'étape ④, par l'équivalence $m^x = c^{xn} \Leftrightarrow xn = \log_c m^x$;
- de l'étape ④ à l'étape ⑤, puisque $n = \log_c m$.

b. **1)** 36 **2)** 7,5 **3)** $^-6$ **4)** $^-6{,}8$

c. Puisque $\log 9^{5000}$ est équivalent à $5000 \log 9$, il suffit de calculer $\log 9$ et de multiplier le résultat par 5000.
Ainsi, $\log 9^{5000} = 5000 \log 9$, soit $5000 \times \approx 0{,}95 \approx 4771{,}21$.

d. On peut passer :
- de l'étape ① à l'étape ②, puisque $m = c^n$;
- de l'étape ② à l'étape ③, puisque $\log_d c^n = n \log_d c$ (équivalence vue précédemment) ;
- de l'étape ③ à l'étape ④, en divisant les deux membres de l'équation par $\log_d c$;
- de l'étape ④ à l'étape ⑤, puisque $n = \log_c m$.

Activité 1 (*suite*)

Page 246

e. À l'aide de l'équivalence $\log_c m = \frac{\log_d m}{\log_d c}$, où $d = \mathrm{e}$ ou $d = 10$, il est possible de calculer le logarithme d'un nombre dans n'importe quelle base.

f. **1)** $\log_6 77$ **2)** $\log_5 0{,}7$ **3)** $\log_{\frac{1}{3}} 8$

g. **1)** $y = \log_5 x$ **2)** $y = \log_{5,2}(x + 4)$ **3)** $y = \log_{0,2} \frac{x}{5}$

Activité 2

Page 247

a. Les coûts liés à la recherche et au développement correspondent à la valeur initiale, c'est-à-dire qu'ils sont de 5000 $.

b. **1)** $0{,}98^x = 0{,}98$ **2)** Parce que $0{,}98^1 = 0{,}98$. Ainsi, $x = 1$.

c. **1)** On peut passer :
- de l'étape ① à l'étape ② en soustrayant 200 des deux membres de l'équation ;
- de l'étape ② à l'étape ③ en divisant les deux membres de l'équation par 4800 ;
- de l'étape ③ à l'étape ④, puisque $\frac{1}{96} = 0{,}98^x \Leftrightarrow x = \log_{0,98} \frac{1}{96}$;
- de l'étape ④ à l'étape ⑤, par l'équivalence du changement de base : $\log_c m = \frac{\log_d m}{\log_d c}$;
- de l'étape ⑤ à l'étape ⑥ en effectuant $\frac{\log \frac{1}{96}}{\log 0{,}98} \approx 226$.

2) La valeur obtenue à l'étape ⑥ signifie qu'il faut vendre environ 226 microscopes pour que le prix de vente d'un microscope soit de 250 $.

d. $250 < 4800(0{,}98)^x + 200$

e. $0 \leq x < 226$

Activité 3

Page 248

a. **1)** Le zéro.

2) On peut passer :
- de l'étape ① à l'étape ②, en additionnant 18 aux deux membres de l'équation ;
- de l'étape ② à l'étape ③, en divisant les deux membres de l'équation par 9 ;
- de l'étape ③ à l'étape ④, puisque $\log(x + 5) = 2 \Leftrightarrow x + 5 = 10^2$;
- de l'étape ④ à l'étape ⑤, car $10^2 = 100$;
- de l'étape ⑤ à l'étape ⑥, en soustrayant 5 des deux membres de l'inéquation.

b. $]-5, +\infty[$

c. L'intervalle où f est négative.

d. $]-5, 95[$

Mise au point 4.3

Page 252

1. **a)** 5 **b)** $\approx -3{,}55$ **c)** $\approx 3{,}32$ **d)** 1 **e)** 0
f) $\approx 1{,}57$ **g)** -3 **h)** $\approx 1{,}11$ **i)** $\approx -11{,}14$

2. **a)** $2 \log_6 x$ **b)** $5 \log_{12}(x - 2)$ **c)** $-3 \log(4x - 1)$ **d)** $-\ln x$
e) $\frac{1}{2}\log_{40} 25x$ **f)** $y \log_c z$ **g)** $2 \ln \frac{x}{y}$ **h)** $-3 \log x$ ou $3 \log \frac{1}{x}$.

3. **a)** $x \approx 0{,}56$ **b)** $x \approx -0{,}58$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = -1$ **e)** $x \approx -1{,}24$
f) $x \approx 13{,}06$ **g)** Aucune solution. **h)** $x \approx 1$ **i)** $x \approx 0{,}74$ **j)** $x \approx -1{,}89$

4. A 6, B 5, C 2, D 1, E 8, F 7, G 4, H 3

Mise au point 4.3 (*suite*)

Page 253

5. **a)** $x = 93$ **b)** $x \approx 1{,}71$ **c)** $x \approx 10{,}25$ **d)** $x \approx -3509{,}52$
e) $x \approx 0{,}21$ **f)** $x \approx 25{,}21$ **g)** $x \approx 2{,}13$ **h)** $x = -0{,}25$

6. **a)**
$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -15 \\ 3(2)^{3x} + 7 + (-5(8)^x - 5) &= -15 \\ 3(2)^{3x} + 7 + (-5(2)^{3x} - 5) &= -15 \\ -2(2)^{3x} + 2 &= -15 \\ -2(2)^{3x} &= -17 \\ 2^{3x} &= 8{,}5 \\ \log_2 8{,}5 &= 3x \\ \frac{\log 8{,}5}{\log 2} &= 3x \\ x &\approx 1{,}03 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 27 \\ 3(2)^{3x} + 7 - (-5(8)^x - 5) &= 27 \\ 3(2)^{3x} + 7 + 5(2)^{3x} + 5 &= 27 \\ 8(2)^{3x} + 12 &= 27 \\ 8(2)^{3x} &= 15 \\ 2^{3x} &= \frac{15}{8} \\ \log_2 \frac{15}{8} &= 3x \\ \frac{\log \frac{15}{8}}{\log 2} &= 3x \\ x &\approx 0{,}3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} h(x) + i(x) &= -17 \\ 2\log(x - 5) + 2 + 5\log(x - 5) - 3 &= -17 \\ 7\log(x - 5) - 1 &= -17 \\ 7\log(x - 5) &= -16 \\ \log(x - 5) &= \frac{-16}{7} \\ 10^{\frac{-16}{7}} &= x - 5 \\ x &\approx 5{,}01 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} h(x) - i(x) &= 4 \\ 2\log(x - 5) + 2 - (5\log(x - 5) - 3) &= 4 \\ 2\log(x - 5) + 2 - 5\log(x - 5) + 3 &= 4 \\ -3\log(x - 5) + 5 &= 4 \\ -3\log(x - 5) &= -1 \\ \log(x - 5) &= \frac{1}{3} \\ 10^{\frac{1}{3}} &= x - 5 \\ x &\approx 7{,}15 \end{aligned}$$

7. **a)** **1)** $x \approx 6{,}14$ **2)** Négatif : $]-\infty, \approx 6{,}14]$; positif : $[\approx 6{,}14, +\infty[$.
b) **1)** $x \approx 7{,}04$ **2)** Négatif : $]7, \approx 7{,}04]$; positif : $[\approx 7{,}04, +\infty[$.
c) **1)** $x \approx 3{,}74$ **2)** Négatif : $[\approx 3{,}74, +\infty[$; positif : $]-\infty, \approx 3{,}74]$.
d) **1)** $x \approx 1{,}16$ **2)** Négatif : $[\approx 1{,}16, +\infty[$; positif : $]-\infty, \approx 1{,}16]$.
e) **1)** $x = -1$ **2)** Négatif : $]-2, -1]$; positif : $[-1, +\infty[$.
f) **1)** $x \approx 0{,}14$ **2)** Négatif : $[\approx 0{,}14, +\infty[$; positif : $]0, \approx 0{,}14]$.

8. **a)** $x \geq 0{,}5$ **b)** $x \leq 1$ **c)** $x \geq 3$ **d)** $x \geq -11$ **e)** $x \leq 1{,}5$ **f)** $x \leq 0$

9. **a)** $x \geq 3$ **b)** $-4 < x \leq -\frac{7}{4}$ **c)** $x \geq \approx -500$ **d)** $x \geq 52$ **e)** $0 < x \leq 25$ **f)** $6 < x \leq 7$

10.

Fonction	f	f^{-1}
Règle	$f(x) = -0{,}3(2)^x + 3$	$f^{-1}(x) = \log_2 \frac{-10x + 30}{3}$
Domaine	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 3[$
Codomaine	$]-\infty, 3[$	$\mathbb{R}$
Valeur initiale	**2,7**	**≈ 3,32**
Zéro	**≈ 3,32**	**2,7**
Signe	**Positif : $]-\infty, 3{,}32]$; négatif : $[3{,}32, +\infty[$**	**Positif : $]-\infty, 2{,}7]$; négatif : $[2{,}7, +\infty[$**

Mise au point 4.3 (*suite*)

Page 254

11. **a)** $x = 8$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = \sqrt{10} - 2$ **d)** $x = -4$ **e)** $x = 1002$
f) $x = 6$ **g)** $x = e$ ou $x = -e$. **h)** $x = \frac{1}{3}$ **i)** $x = 5$ **j)** $x = 2$ ou $x = 5$.

12. **a)** 27 °C
b) **1)** 1 m **2)** ≈ 2,94 m **3)** ≈ 8,7 m
c) La longueur du tuyau est comprise entre 5,97 m environ et environ 15,28 m.

13. **a)** ≈ 6,12 ans.
b) ≈ 11,3 ans.
c) Il faut entre 15,78 ans environ et environ 23,28 ans.

14. **a)** La règle est $V = 1500\left(1 + \frac{0{,}035}{2}\right)^{2t} = 1500(1{,}0175)^{2t}$, où V correspond à la valeur (en $) du placement et t, au temps (en années).

b)
$$3000 = 1500(1{,}0175)^{2t}$$
$$2 = (1{,}0175)^{2t}$$
$$2t = \log_{1{,}0175} 2$$
$$2t = \frac{\log 2}{\log 1{,}0175}$$
$$t \approx 19{,}98 \text{ ans.}$$
La valeur de ce placement aura doublé dans environ 19,98 ans.

c)
$$2500 = 1500(1{,}0175)^{2t}$$
$$\frac{5}{3} = (1{,}0175)^{2t}$$
$$2t = \log_{1{,}0175} \frac{5}{3}$$
$$2t = \frac{\log \frac{5}{3}}{\log 1{,}0175}$$
$$t \approx 14{,}72 \text{ ans.}$$
Ce placement dure au moins environ 14,72 ans.

Mise au point 4.3 (*suite*)

Page 255

15. La règle est $y = 35\ 000(0{,}9932)^x$, où y représente la valeur du bateau (en \$) et x, le temps (en mois).
La valeur du bateau vaut 25 000 \$ environ 49,45 mois après l'achat.

16. La mise en garde doit être émise environ 11,46 semaines après le 1er mai.

17. a) La règle est $A = \log_{1,25} 0{,}5q$, où A correspond à l'âge (en jours) des vers à soie et q, à la quantité cumulative (en kg) de feuilles consommées.

b) 1) Les vers à soie sont âgés d'environ 14,43 jours.
2) Les vers à soie sont âgés d'environ 21,64 jours.
3) Les vers à soie sont âgés d'environ 27,38 jours.

c) Les vers à soie sont matures à 29,03 jours environ.

Mise au point 4.3 (*suite*)

Page 256

18. La règle est $M = 600(1{,}15)^{3t}$, où M représente le nombre de membres et t, le temps (en années).

a) 1) Il y aura 690 membres. **2)** Il y aura environ 740 membres.
3) Il y aura environ 913 membres. **4)** Il y aura environ 1388 membres.

b) Cet achat se fera après environ 14,62 mois.

19. La règle est $D = 200(1{,}5)^{\frac{t}{4}}$, où D représente le nombre de drosophiles et t, le temps (en jours).
Cette culture compte plus de 2000 drosophiles après environ 22,72 jours.

20. a)
$$3 = -\frac{285}{9{,}3}\ln\frac{p}{103}$$
$$e^{\frac{-27{,}9}{285}} = \frac{p}{103}$$
$$p \approx 93{,}39 \text{ kPa}$$
La pression atmosphérique est environ de 93,39 kPa.

b) $A = -\frac{253}{9{,}3}\ln\frac{85}{103}$, soit $\approx 5{,}23$ km.
L'altitude de l'alpiniste est environ de 5,23 km.

c)
$$8{,}848 = -\frac{243}{9{,}3}\ln\frac{p}{103}$$
$$e^{\frac{-82{,}2864}{243}} = \frac{p}{103}$$
$$p \approx 73{,}41 \text{ kPa}$$
La pression atmosphérique est environ de 73,41 kPa.

21. a) 1) 60 min **2)** 42 min **3)** $\approx 2{,}42$ min
b) 1) Au moins 2 pièces. **2)** Au moins 3 pièces. **3)** Au moins 5 pièces.

Mise au point 4.3 (*suite*)

Page 257

22. La règle est $P = -350(0{,}7)^t + 350$, où P représente la pression et t, le temps.

a) La pression exercée sur la tige d'acier est de 100 MPa à environ 0,94 s.
b) La pression exercée sur la tige d'acier est de 250 MPa à environ 3,51 s.
c) La pression exercée sur la tige d'acier est de 348 MPa à environ 14,48 s.

23. a) 1) L'épaisseur d'une vitre teintée est environ de 2,23 cm.
2) L'épaisseur d'une vitre teintée est environ de 10,5 cm.
b) 1) L'épaisseur d'une vitre teintée est environ de 16,09 cm.
2) L'épaisseur d'une vitre teintée est environ de 4,78 cm.

24. a) 1)
$$7500 = 5000e^{5r}$$
$$1{,}5 = e^{5r}$$
$$5r = \ln 1{,}5$$
$$r \approx 0{,}0811, \text{ soit } \approx 8{,}11\,\%.$$

2)
$$10\ 000 = 5000e^{12r}$$
$$2 = e^{12r}$$
$$12r = \ln 2$$
$$r \approx 0{,}0578, \text{ soit } \approx 5{,}78\,\%.$$

3)
$$15\ 000 = 5000e^{24r}$$
$$3 = e^{24r}$$
$$24r = \ln 3$$
$$r \approx 0{,}0458, \text{ soit } \approx 4{,}58\,\%.$$

b) 1) $\approx 4{,}96$ ans **2)** $\approx 15{,}4$ ans **3)** $\approx 24{,}41$ ans

c) 1) $r = \frac{\ln 2}{t}$ **2)** $t = \frac{\ln 2}{r}$

RUBRIQUES PARTICULIÈRES 4

Chronique du passé

Page 259

1. a) 717,32 $ **b)** 129 116,70 $

2. a) 2 584 929 **b)** 45 **c)** 262 144
d) 16 807 **e)** 21 **f)** 2 585 869

Le monde du travail

Page 261

1. La règle est $C \approx -5{,}3(0{,}81)^t + 6$, où C représente la concentration et t, le temps.
La concentration d'uranium est conforme entre 2,61 h environ et environ 7,64 h.

2. La règle est $N = 8(3)^{5t}$, où N représente le nombre de neutrons et t, le temps.

a) Il y a plus de 1 million de neutrons libérés après environ 2,14 µs.

b) Environ $5{,}74 \times 10^{24}$ neutrons sont libérés.

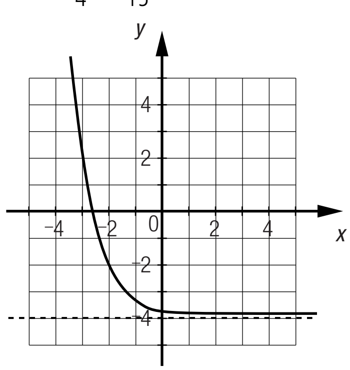
3. La règle est $T \approx -46e^{-0{,}004x} + 26$.

Vue d'ensemble

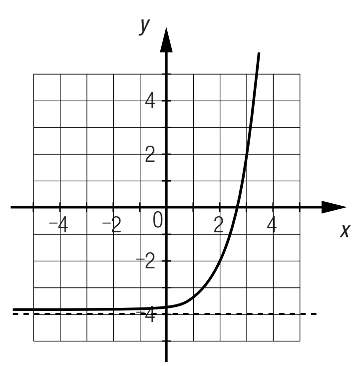
Page 262

1. a) $f^{-1}(x) = 3^{\frac{x}{4}} + 8$ **b)** $g^{-1}(x) = 12(10)^{-2x}$ **c)** $h^{-1}(x) = -\log_{1,15}\left(-\frac{5x}{11}\right) - 6$
d) $i^{-1}(x) = -\frac{1}{4}\ln -\frac{x}{15}$ **e)** $j^{-1}(x) = \log_{0,85}(0{,}5x - 6)$ **f)** $k^{-1}(x) = 150e^{\frac{x}{200}}$

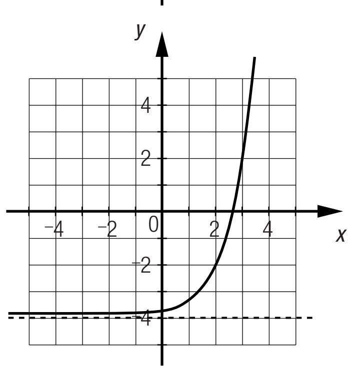
2. a) 1)



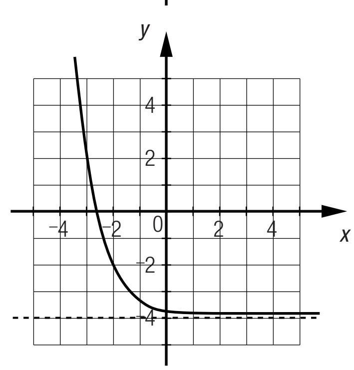
2)



3)



4)



b) Malgré les différentes écritures des règles des fonctions, les représentations graphiques sont parfois les mêmes.
Ainsi en **a)**, le 1er et le 4e graphique sont identiques, et le 2e et le 3e graphique sont identiques.

3. a) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 0[$. **2)** $\approx -195,31$ **3)** Aucun.
4) Négatif : $\mathbb{R}$.

b) 1) Domaine : $]-\infty, 7[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** $\approx -5,24$ **3)** $\approx -24,62$
4) Négatif : $[\approx -24,62, 7[$; positif : $]-\infty, \approx -24,62]$.

c) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-6, +\infty[$. **2)** $\approx -5,78$ **3)** -3
4) Négatif : $[-3, +\infty[$; positif : $]-\infty, -3]$.

d) 1) Domaine : $]-7, +\infty[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** $\approx 5,77$ **3)** 93
4) Négatif : $[93, +\infty[$; positif : $]-7, 93]$.

e) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-1, +\infty[$. **2)** $\approx -0,58$ **3)** 1,5
4) Négatif : $]-\infty, 1,5]$; positif : $[1,5, +\infty[$.

f) 1) Domaine : $]-8, +\infty[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** 8 **3)** 8
4) Négatif : $[8, +\infty[$; positif : $]-8, 8]$.

g) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 4[$. **2)** $\approx 3,98$ **3)** $\approx 5,31$
4) Négatif : $[\approx 5,31, +\infty[$; positif : $]-\infty, \approx 5,31]$.

h) 1) Domaine : $]3, +\infty[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** Aucune. **3)** $\approx 3,50$
4) Négatif : $[\approx 3,50, +\infty[$; positif : $]3, \approx 3,50]$.

i) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]5, +\infty[$. **2)** 17,8 **3)** Aucun.
4) Positif : $\mathbb{R}$.

j) 1) Domaine : $]2, +\infty[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** Aucune. **3)** $\approx 2,60$
4) Négatif : $[\approx 2,60, +\infty[$; positif : $]2, \approx 2,60]$.

k) 1) Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-8, +\infty[$. **2)** 249 992 **3)** $\approx 1,12$
4) Négatif : $[\approx 1,12, +\infty[$; positif : $]-\infty, \approx 1,12]$.

l) 1) Domaine : $]0,4, +\infty[$; codomaine : $\mathbb{R}$. **2)** Aucune. **3)** $\approx 15,37$
4) Négatif : $[\approx 15,37, +\infty[$; positif : $]0,4, \approx 15,37]$.

4. a) $x \approx -0,97$ **b)** $x = 120$ **c)** $x \approx 3,34$
d) $x \approx -0,48$ **e)** $x \approx 0,31$ **f)** $x = 4\,000\,000$
g) $x \approx -0,025$ **h)** $x \approx 0,9$ **i)** $x = -143$

5. a) $x = 5$ **b)** $x = 729$ **c)** $x = 4$
d) $x \approx 8,66$ **e)** $x \approx 4,73$ **f)** $x = 0,0081$

Vue d'ensemble (*suite*)

6. a) $f(x) = -0,5(5)^x + 8$ **b)** $f(x) = \log_3 0,5(x - 2)$ **c)** $f(x) = 3(0,5)^x - 3$
d) $f(x) = \log_{0,5} -0,2(x - 4)$ **e)** $f(x) = 2000(1,8)^x + 500$ **f)** $f(x) = \log_{0,9} \frac{1}{5000}(x - 1000)$
g) $f(x) \approx -2(0,82)^x + 1$ **h)** $f(x) = -2(10)^x - 1,5$ **i)** $f(x) = \log -0,5(x + 1,5)$

7. a) $x > 1,73$ **b)** $x \in]6, 59\,055[$ **c)** $x \geq \approx 6,62$
d) $x \leq -950\,000$ **e)** $x \geq \approx -8,21$ **f)** $x \leq \approx -0,89$
g) $x \in]\approx 0,46, 1[$ **h)** $x \in]0, 8]$ **i)** Aucune solution.

8. a)
$$\begin{aligned} 16(2)^x + 20(2)^x - 4(2)^x &= 1024 \\ 32(2)^x &= 1024 \\ 2^x &= 32 \\ x &= \log_2 32 \\ x &= \frac{\log 32}{\log 2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 8(5)^x + 2(5)^{x+1} + 7(5)^x &= 625 \\ 8(5)^x + 2(5)^x \times 5^1 + 7(5)^x &= 625 \\ 8(5)^x + 10(5)^x + 7(5)^x &= 625 \\ 25(5)^x &= 625 \\ 5^x &= 25 \\ x &= \log_5 25 \\ x &= \frac{\log 25}{\log 5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}4(3)^x + 7(3)^{x+1} - 3^x &= 4\\ 4(3)^x + 7(3)^x \times 3^1 - 1(3)^x &= 4\\ 4(3)^x + 21(3)^x - 1(3)^x &= 4\\ 24(3)^x &= 4\\ 3^x &= \frac{1}{6}\\ x &= \log_3\frac{1}{6}\\ x &= \frac{\log\frac{1}{6}}{\log 3}\\ x &\approx {}^-1{,}63\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}2^x + 12(2)^{x-2} - 1 &= 48\\ 1(2)^x + 12(2)^x \times 2^{-2} &= 49\\ 1(2)^x + 3(2)^x &= 49\\ 4(2)^x &= 49\\ 2^x &= \frac{49}{4}\\ x &= \log_2\frac{49}{4}\\ x &= \frac{\log\frac{49}{4}}{\log 2}\\ x &\approx 3{,}61\end{aligned}$$

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 264

9. a) La règle est $t = 60\log_{0,97}\frac{P + 10}{110}$.

b) $\approx 93{,}5\,\%$

c) On doit appliquer l'écran solaire de nouveau après environ 507,88 min.

10. La personne devrait choisir les intérêts composés tous les 6 mois pour obtenir un montant final d'environ 7341,49 $ plutôt que d'environ 7276,25 $.

11. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $y = \frac{9189}{10\,000}e^{\frac{13x}{2000}}$.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 265

12. a) La règle est $P = 500(0{,}81)^{\frac{t}{4}} - 25$, où P correspond à la population de requins et t, au temps (en années).

b)
$$\begin{aligned}250 &= 500(0{,}81)^{\frac{t}{4}} - 25\\ 0{,}55 &= 0{,}81^{\frac{t}{4}}\\ \frac{t}{4} &= \log_{0,81}0{,}55\\ \frac{t}{4} &= \frac{\log 0{,}55}{\log 0{,}81}\\ t &\approx 11{,}35 \text{ années.}\end{aligned}$$

Cette région compte 250 requins à 11,35 années environ.

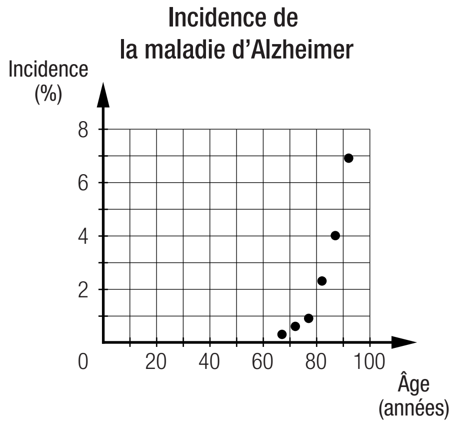
c)
$$\begin{aligned}100 &= 500(0{,}81)^{\frac{t}{4}} - 25\\ 0{,}25 &= 0{,}81^{\frac{t}{4}}\\ \frac{t}{4} &= \log_{0,81}0{,}25\\ \frac{t}{4} &= \frac{\log 0{,}25}{\log 0{,}81}\\ t &\approx 26{,}32 \text{ années.}\end{aligned}$$

La population est au moins de 100 requins pendant environ 26,32 années.

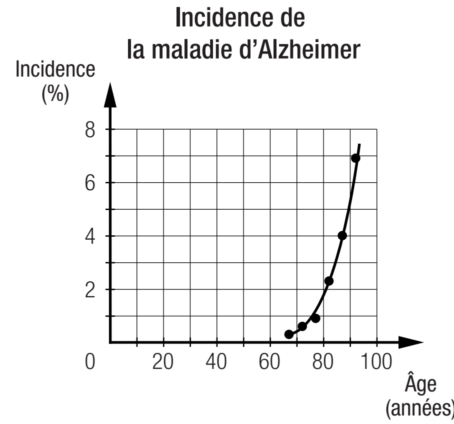
d)
$$\begin{aligned}0 &= 500(0{,}81)^{\frac{t}{4}} - 25\\ 0{,}05 &= 0{,}81^{\frac{t}{4}}\\ \frac{t}{4} &= \log_{0,81}0{,}05\\ \frac{t}{4} &= \frac{\log 0{,}05}{\log 0{,}81}\\ t &\approx 56{,}87 \text{ années.}\end{aligned}$$

La population de requins disparaît à 56,87 années environ.

13. a)



b) 1)



2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $I = \frac{e^{0,1275a}}{16\,666,67}$, où I représente l'incidence (en %) et a, l'âge (en années).

c) Une personne devrait être soumise à ces tests à partir de 76 ans.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 266

14. a) Le niveau d'eau est d'au moins 2,5 m environ.

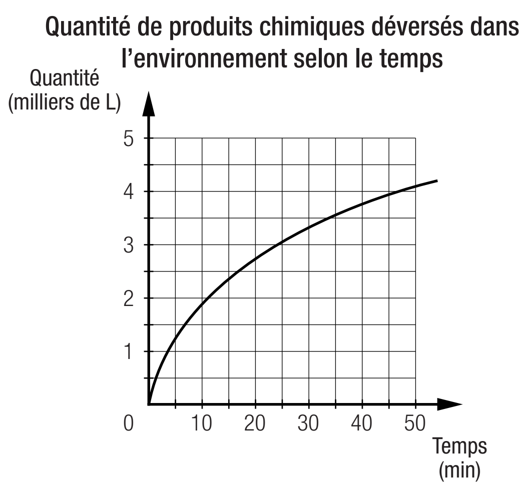
b)
$$d = 18,5^{\frac{2n}{3}} - 1$$
$$d + 1 = 18,5^{\frac{2n}{3}}$$
$$\log_{18,5}(d + 1) = \frac{2n}{3}$$
$$\frac{3}{2}\log_{18,5}(d + 1) = n$$

La règle est $n = 1,5\log_{18,5}(d + 1)$.

15. Le débit associé au seuil critique est environ de 74,3 cm³/s.

16. Les températures possibles de ce mélange sont comprises entre 20,64 °C environ et environ 32,02 °C.

17. a)



b) 5000 L de produits chimiques auront été déversés après environ 89,48 min.

c) La fuite a duré entre 47,49 min environ et environ 89,48 min.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 267

18. a) $N = 2500e^{0,6(0)} = 2500$ abeilles.

b) 1) $N = 2500e^{0,6(1)}$, soit $\approx$ 4555 abeilles.

2) $N = 2500e^{0,6(2)}$, soit $\approx$ 8300 abeilles.

3) $N = 2500e^{0,6(4)}$, soit $\approx$ 27 558 abeilles.

c) $50\ 000 = 2500e^{0,6t}$
$20 = e^{0,6t}$
$0,6t = \ln 20$
$t \approx 4,99$ semaines.
Donc, environ le 6 mai.

19. a) Au début du processus de vieillissement, l'eau compte pour 30 % de la masse de ce fromage.

b) $28 = 30e^{-0,01t}$
$\frac{14}{15} = e^{-0,01t}$
$-0,01t = \ln \frac{14}{15}$
$t \approx 6,90$ ans.
La quantité d'eau sera de 28 % de la masse de ce fromage dans environ 6,90 ans.

20. a) **1)** 450 **2)** 10,7 **3)** 225
b) **1)** $225 = 450e^{a10,7}$ **2)** $\approx -0,06$ **3)** $M = 450e^{-0,0648t}$
c) **1)** $M = 5e^{-0,0001t}$ **2)** $M = 50e^{-0,0564t}$ **3)** $M = M_0e^{\frac{-t}{1\ 024\ 313\ 479}}$

Vue d'ensemble (*suite*)

21. a) $P = 250e^{0,7(0)} = 250$ pissenlits.
b) **1)** $P = 250e^{0,7(1)}$, soit ≈ 503 pissenlits.
2) $P = 250e^{0,7(2)}$, soit ≈ 1014 pissenlits.
3) $P = 250e^{0,7(4)}$, soit ≈ 4111 pissenlits.
c) ≈ 26 pissenlits.

22. a) La règle est $Q = 2(0,8)^{2t}$.
b) Puisqu'il reste 0,8192 L de liquide, 1,1808 L du liquide s'est évaporé.
c) On doit arrêter l'ébullition après environ 4,25 h.
d) La quantité de sauce produite est de 0,3 L.

23. La règle est $f(x) = \log_2(x + 1)$, où $f(x)$ représente le nombre de visiteurs et x, le temps.
a) $\approx 3,46$ millions de visiteurs.
b) 4 millions de visiteurs.
c) $\approx 4,95$ millions de visiteurs.

Vue d'ensemble (*suite*)

24. a) La règle est $C \approx 300(0,95)^t - 10$, où C correspond au nombre de colonies et t, à la température (en °C).
b) Non. À cette température, la viande contient encore environ 3,82 colonies de bactéries.

25. a) **1)** La concentration de CO_2 en fonction du temps évolue selon un modèle linéaire.
2) La concentration de CO_2 en fonction du temps évolue selon un modèle exponentiel.
b) La règle est $C = 0,2t + 285$, où C correspond à la concentration (en ppm) de CO_2 et t, au temps écoulé (en années) depuis 1850.
c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Équation 1 : $310 = ac^{110} + 300$ Équation 2 : $350 = ac^{130} + 300$
$\frac{10}{c^{110}} = a$ $\frac{50}{c^{130}} = a$
Résolution du système formé des équations 1 et 2 :
$\frac{10}{c^{110}} = \frac{50}{c^{130}}$
$c^{20} = 5$
$c \approx 1,0838$
Donc, $a \approx \frac{10}{1,0838^{110}} \approx 0,0014$.
La règle est $C \approx 0,0014(1,0838)^t + 300$, où C correspond à la concentration de CO_2 (en ppm) et t, au temps écoulé (en années) depuis 1850.

d) *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

1) La concentration possible de CO_2 est environ de 411,80 ppm.
2) La concentration possible de CO_2 est environ de 550 ppm.
3) La concentration possible de CO_2 est environ de 1550 ppm.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 270

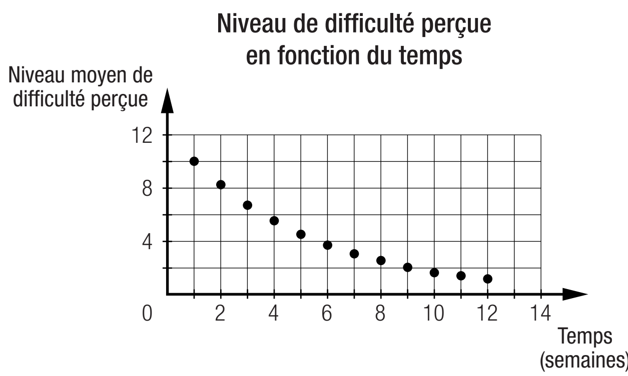
26. La règle est $P = \log_{0,8\frac{1}{8}}(x - 0,25)$, où P représente la profondeur (en m) et x, la température (en °C).
La température varie de 25,28 °C environ à environ 25,55 °C. L'écart de température de l'eau est donc d'environ 0,27 °C.

27. Le temps nécessaire à la dégradation complète :
- d'un sac en plastique est environ de 461,75 années ;
- d'un mouchoir de papier est environ de 0,25 année ;
- d'un carton de lait est environ de 49,88 années ;
- d'une gomme à mâcher est environ de 5 années ;
- d'une pile alcaline est environ de 6931,13 années.

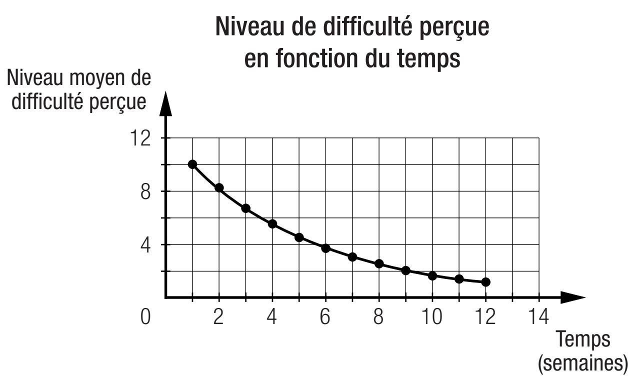
Vue d'ensemble (*suite*)

Page 271

28. a)



b) 1)



2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $D = 12,342e^{-0,2025x}$.

c) 1) À la semaine 2. **2)** À la semaine 3. **3)** À la semaine 4. **4)** À la semaine 6.

29. Soit P, la population (en milliers) et t, le temps (en années).
Règle associée à la ville **A** : $P_A \approx 8,88(0,75)^t + 10$
Règle associée à la ville **B** : $P_B \approx -13,33(0,75)^t + 15$
Il y a un écart d'environ 4,35 ans entre les moments où chacune de ces villes a reçu cette subvention.

Banque de problèmes

Page 272

1. Calculer le nombre de personnes qui sont infectées au début du processus de conception du vaccin en substituant 0 à t dans l'équation.

$$N = 3000(1{,}75)^0 + 5000 = 8000 \text{ personnes.}$$

Calculer le moment où la campagne de vaccination massive a commencé en substituant 46 000 à N dans l'équation.

$$46\,000 = 3000(1{,}75)^t + 5000$$
$$t \approx 4{,}67 \text{ mois.}$$

À partir de ce moment, le nombre de personnes infectées diminue selon une fonction polynomiale de degré 1 dont la droite passe par les points ($\approx$ 4,67, 46 000) et (5, 40 000).

$$N \approx {}^-18\,337{,}4t + 131\,687$$

On veut connaître la valeur de t lorsque 8000 personnes ou moins sont infectées.

$$8000 \approx {}^-18\,337{,}4t + 131\,687$$
$$t \approx 6{,}75 \text{ mois.}$$

On veut également connaître la valeur de t lorsque plus aucune personne ne sera infectée.

$$0 \approx {}^-18\,337{,}4t + 131\,687$$
$$t \approx 7{,}18 \text{ mois.}$$

D'environ 6,75 mois à 7,18 mois après le début du processus de conception du vaccin, le nombre de personnes atteintes du virus est inférieur ou égal au nombre de personnes qui étaient infectées au début du processus de conception du vaccin.

2. Déterminer la règle de la fonction qui permet de calculer le nombre de cellules souches de type A N_A selon le temps t (en h).

$$N_A = 2000(3)^{\frac{t}{2}}$$

Déterminer la règle de la fonction qui permet de calculer le nombre de cellules souches de type B N_B selon le temps t (en h).

$$N_B = 2000(5)^{2(t-2)}$$

On cherche la valeur de t lorsque $N_A = N_B$.

Après environ 2,41 h, le nombre de cellules souches de type A est le même que le nombre de cellules souches de type B.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 273

3. Soit S_P la somme investie au départ par Patrice et V_P la valeur de ce placement après t années.

$$V_P = S_P(1{,}02)^{4t}$$

Soit S_M la somme investie au départ par Maryse et V_M la valeur de ce placement après t années.

$$V_M = S_M(1{,}04)^t$$

Sachant que $S_M = 2S_P$, modifier la règle précédente comme suit :

$$V_M = 2S_P(1{,}04)^t$$

Déterminer à quel moment le placement de Patrice aura quadruplé.

On veut que $\frac{V_P}{S_P} = 4$.

On obtient l'équation : $4 = 1{,}02^{4t}$.
Donc, $t \approx 17{,}5$ ans.

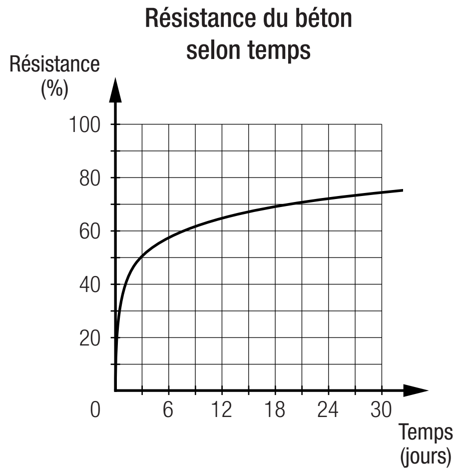
Déterminer la valeur du placement de Maryse dans 17,5 ans.

$$V_M = 2S_P(1{,}04)^{17{,}5}\text{, soit } \approx 3{,}97S_P.$$

Patrice a raison, car dans environ 17,5 ans, son placement aura quadruplé alors que le placement de Maryse vaudra environ 3,97 fois la somme qu'il a placée initialement.

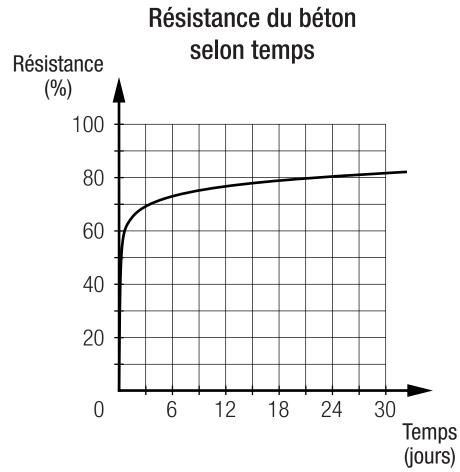
4. **Entreprise A**

La résistance du béton de l'entreprise **A** varie selon la règle $r \approx \log_{1,1} 40(t + 0,025)$.



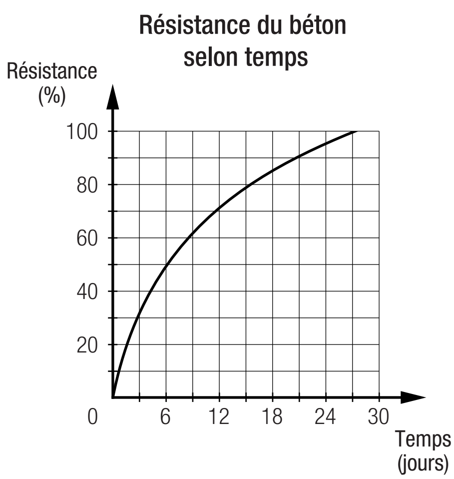
Entreprise B

La résistance du béton de l'entreprise **B** varie selon la règle $r \approx \log_{1,2} 100\,000(t + 0,000\,01)$.



Entreprise C

La résistance du béton de l'entreprise **C** varie selon la règle $r \approx \log_{1,025} 0,4(t + 2,5)$.



D'après ces analyses, seul le procédé de l'entreprise **C** respecte les normes de l'industrie, puisqu'en 27,03 jours environ, le pourcentage de résistance du béton de cette entreprise atteint 100 %.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 274

5. La concentration de chlore dans l'eau de la piscine varie selon la règle $C = 2(0,9)^t$, où C correspond à la concentration de chlore (en ppm) et t, au temps (en jours).

Déterminer le temps requis pour que la concentration de chlore atteigne 1 ppm.

$$1 = 2(0,9)^t$$
$$t \approx 6,58 \text{ jours.}$$

Au début de la saison, mélanger 2 kg de chlore à l'eau de la piscine. Par la suite, ajouter 500 g de chlore tous les 6,5 jours. Cette façon de procéder nécessite environ 9,5 kg de chlore pour que la piscine fonctionne pendant 100 jours.

6. Soit V la valeur (en \$) des actions et t, le temps écoulé (en mois) depuis l'achat.

La valeur des actions de l'entreprise **A** varie selon la règle $V_A = 4000(1{,}05)^t$.
La valeur des actions de l'entreprise **B** varie selon la règle $V_B = {}^-1000(1{,}05)^t + 8000$.

Déterminer à quel moment $V_A + V_B = 15\,000$.

$$15\,000 = 4000(1{,}05)^t + {}^-1000(1{,}05)^t + 8000$$
$$15\,000 = 3000(1{,}05)^t + 8000$$
$$t \approx 17{,}37 \text{ mois.}$$

Jeanne doit vendre ses actions environ 17,37 mois après l'achat.

7. Au début du traitement, il n'y a pas de médicament dans l'organisme du patient. La règle $Q = \log_2(t + 1)$ permet donc de calculer la quantité de médicament présente dans son organisme.

La première injection de médicament prend 255 s ou 4,25 min.

Comme la demi-vie de ce médicament est de 60 min, on obtient l'équation $8(0{,}5)^{\frac{t}{60}} = 0{,}75$. Résoudre cette équation.

$$t \approx 204{,}9 \text{ min}$$

Pour la deuxième injection, il reste 0,75 g de médicament dans l'organisme du patient. La règle $Q = \log_2(t + 1) + 0{,}75$ permet donc de calculer la quantité de médicament présente dans son organisme.

La deuxième injection prend environ 151,2 s ou environ 2,52 min.

Comme le traitement est terminé lorsque la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est inférieure à 0,01 g, on obtient l'inéquation $8(0{,}5)^{\frac{t}{60}} \leq 0{,}01$. Résoudre cette inéquation.

$$t \geq 578{,}63 \text{ min}$$

La durée de ce traitement est environ de 790,3 min, soit environ 13,17 h.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 275

8. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

Ingrid a tort. Soit la table de valeurs associée à cette situation.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
***f*(*x*)**	19 683	81	3	1	3	81	19 683

On constate que pour une même variation de la variable indépendante, les variations de la variable dépendante ne forment pas une suite arithmétique et que leur différence n'est pas constante.

+ 1   + 1   + 1   + 1   + 1   + 1

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
***f*(*x*)**	19 683	81	3	1	3	81	19 683

− 19 602   − 78   − 2   + 2   + 78   + 19 602

+ 19 524   + 76   + 4   + 76   + 19 524

9. Pendant le traitement, le pourcentage de cellules saines varie selon la règle $P \approx \log_{1,05} {}^{-}9,9(t - 5)$.

Déterminer à quel moment 20 % des cellules de la moelle osseuse seront saines.

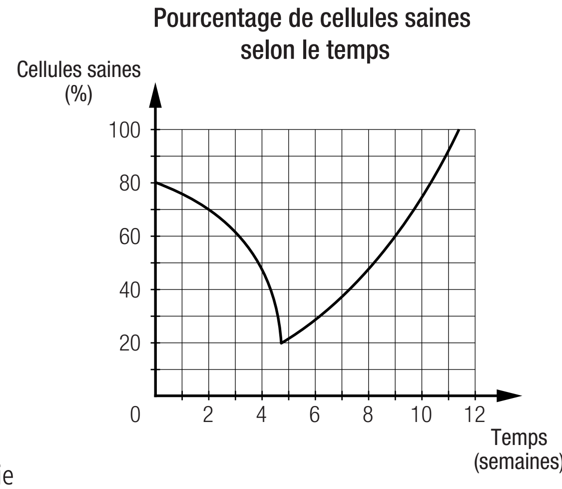
$$20 \approx \log_{1,05} {}^{-}9,9(t - 5)$$
$$t \approx 4,73 \text{ semaines.}$$

Par la suite, le pourcentage de cellules saines varie selon la règle $P = 15(1,43)^{\frac{t}{2}} - 15$.

Déterminer à quel moment 100 % des cellules de la moelle osseuse seront saines.

$$100 = 15(1,43)^{\frac{t}{2}} - 15$$
$$t \approx 11,39 \text{ semaines.}$$

Le graphique ci-contre montre que, au départ, 80 % des cellules sont saines. Le nombre de cellules décroît pendant la chimiothérapie pendant environ 4,73 semaines. Les cellules saines augmentent ensuite pour atteindre 100 % au bout d'environ 11,39 semaines.



10. Déterminer le temps t où le parapentiste atteint une altitude maximale.

$$1500 = {}^{-}1300(0,85)^{t} + 1600$$
$$t \approx 15,78 \text{ min}$$

Déterminer le temps t où il atterrira.

$$0 = 0,5\left(\frac{e}{3}\right)^{t - 100} - 522$$
$$t \approx 29,51 \text{ min}$$

La durée de la descente est environ de 13,73 min.

Le parapentiste n'a pas atteint son objectif, car l'ascension a duré environ 15,78 min alors que la descente a duré environ 13,73 min.