VISION 8 | Les lieux géométriques et les transformations géométriques

RÉVISION 8

Réactivation 1

Page 238

a. 1) Un triangle rectangle. **2)** Un trapèze isocèle.

b. 1) 120° **2)** 60° **3)** 30° **4)** 90° **5)** 90°

c. 1) Une translation. **2)** Une réflexion. **3)** Une rotation ou une homothétie.
4) Une translation. **5)** Une réflexion. **6)** Une rotation ou une homothétie.

Réactivation 2

Page 239

a. 1) Croquis 1 : ABC Croquis 2 : DEF
2) Croquis 1 : A'B'C' Croquis 2 : D'E'F'
3) Croquis 1 : Le point P. Croquis 2 : Le point Q.

b. Les droites tracées en pointillé passent par le centre d'homothétie, par un point de la figure initiale et par le point image de ce point.

c. 1) i) 2 **ii)** 2 **iii)** 2 **2)** Le rapport d'homothétie est 2.

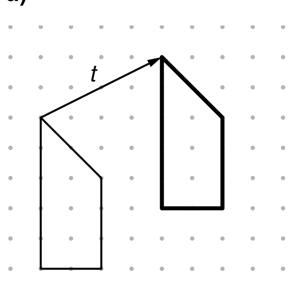
d. 1) i) $\frac{1}{2}$ **ii)** $\frac{1}{2}$ **iii)** $\frac{1}{2}$ **2)** Le rapport d'homothétie est $\frac{1}{2}$.

e. 1) Les dimensions de la figure image seront plus petites que les dimensions de la figure initiale.
2) Les dimensions de la figure image seront les mêmes que les dimensions de la figure initiale.
3) Les dimensions de la figure image seront plus grandes que les dimensions de la figure initiale.

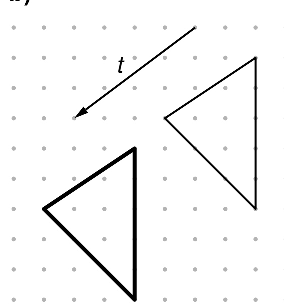
Mise à jour

Page 242

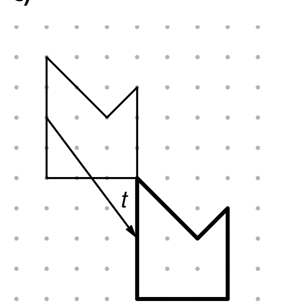
1. a)



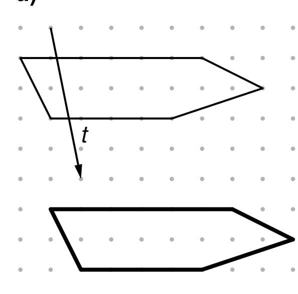
b)



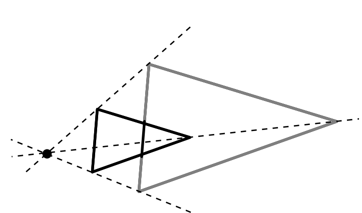
c)



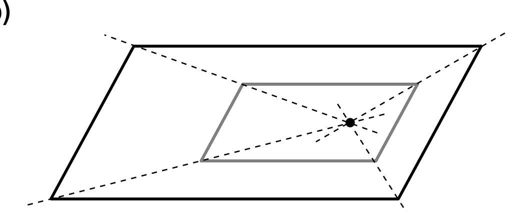
d)



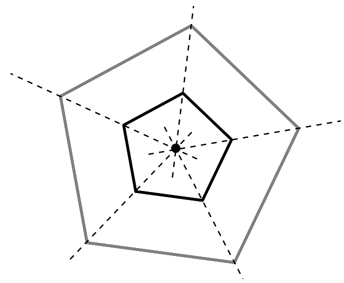
2. a)



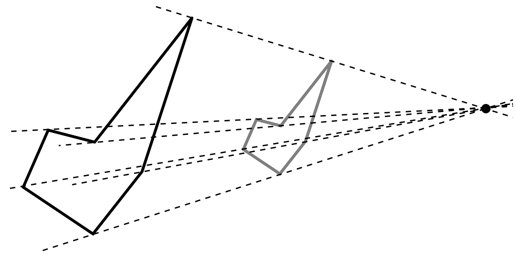
b)



c)



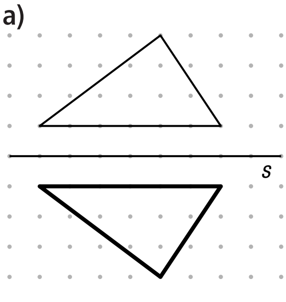
d)



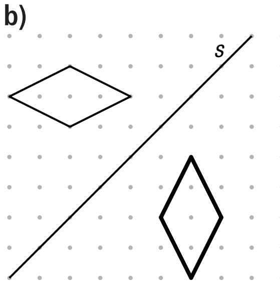
Mise à jour (*suite*)

Page 243

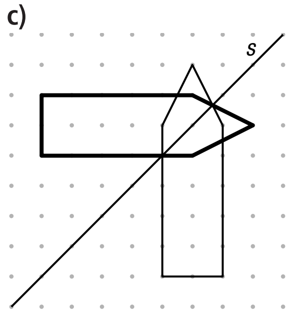
3. a)



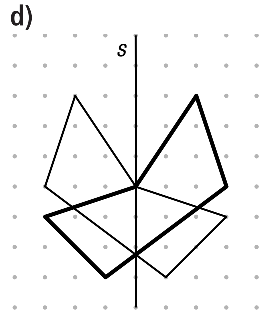
b)



c)



d)



4. a) Réflexion. **b)** Homothétie. **c)** Réflexion. **d)** Rotation. **e)** Translation. **f)** Homothétie.

5. *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

a) Rotation. **b)** Réflexion. **c)** Translation.

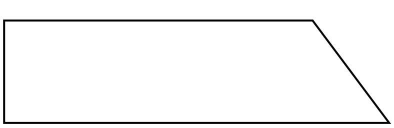
Mise à jour (*suite*)

Page 244

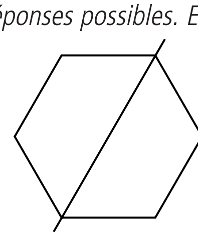
6. *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

a) Rotation de 280° dans le sens des aiguilles d'une montre.
b) Rotation de 160° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
c) Rotation de 230° dans le sens antihoraire.
d) Rotation de 340° dans le sens horaire.
e) Rotation de 30°.
f) Rotation de $^{-}90°$.

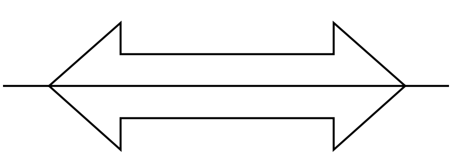
7. **A** Non symétrique.



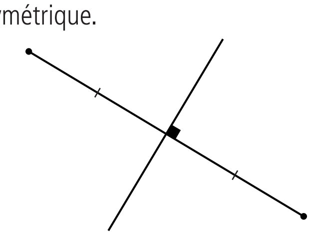
B Symétrique.
Plusieurs réponses possibles. Exemple :



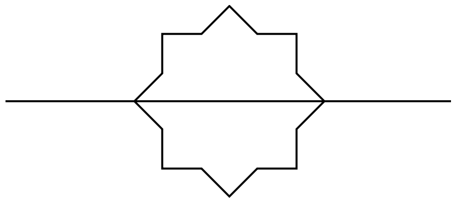
C Symétrique.
Plusieurs réponses possibles. Exemple :



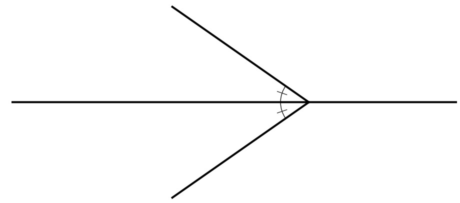
D Symétrique.



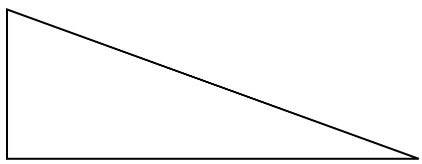
E Symétrique.
Plusieurs réponses possibles. Exemple :



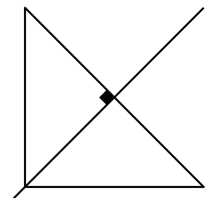
F Symétrique.



G Non symétrique.



H Symétrique.



Mise à jour (*suite*)

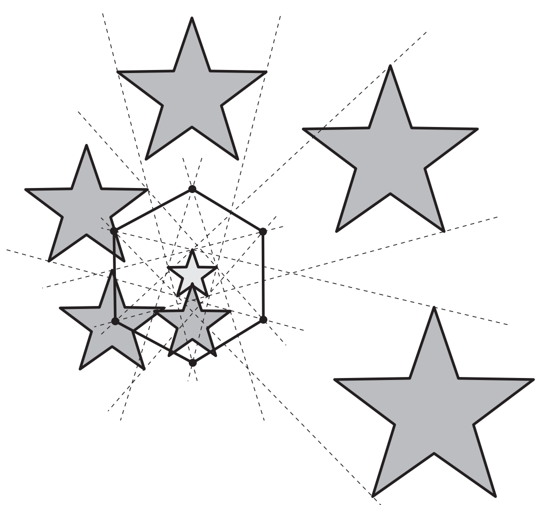
Page 245

8. a) $\frac{18,2}{7,28} = 2,5$ **b)** $\frac{23,48 \div 3}{9,39} \approx 0,83$ **c)** $\frac{9,29}{1,86} \approx 4,99$

d) $\sqrt{\frac{70}{11,2}} = 2,5$ **e)** Aire du Δ ABC : $\frac{\left(\frac{6,78}{3}\right)^2 \times \sin 60°}{2} \approx 2,21$ Rapport : $\sqrt{\frac{58,61}{2,21}} \approx 5,15$

9. a) Le point C. **b)** Le point E. **c)** Le point H.
d) Le point F. **e)** Le point I. **f)** Le point A.

10.

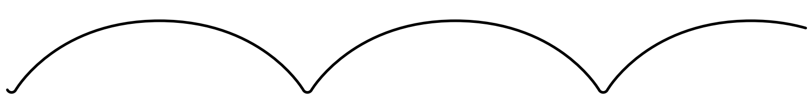


SECTION 8.1 Les lieux géométriques

Problème

Page 246

L’empreinte lumineuse laissée par le réflecteur avant du vélo ressemblerait à celle illustrée ci-dessous.



Activité 1

Page 247

a. Un cercle.

Activité 1 (*suite*) **Page 248**

b. La médiatrice du segment AB.

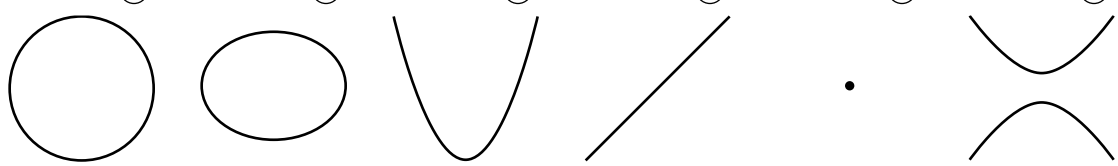
Activité 1 (*suite*) **Page 249**

c. Un cercle dont la mesure du rayon correspond à la moitié de celle du cercle de centre O.

d. Une sphère de 4 cm de rayon.

Activité 2 **Page 251**

a. Situation ① **Situation ②** **Situation ③** **Situation ④** **Situation ⑤** **Situation ⑥**



b. 1) À une droite. **2)** À un point.

c. *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

1) La conique définie à la situation ② est bornée, alors que celle définie à la situation ③ est non bornée.

2) Les coniques définies dans les deux situations sont non bornées. La conique définie à la situation ③ est formée d'une seule courbe, alors que celle définie à la situation ⑥ est formée de deux courbes.

Mise au point 8.1 **Page 253**

1. a) Deux droites parallèles situées de part et d'autre de cette droite. **b)** Un cercle.

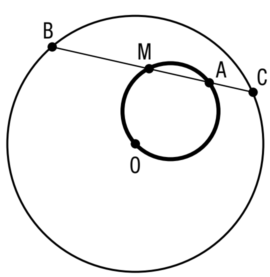
c) La médiatrice de ce segment. **d)** Un cercle concentrique ou un point qui est le centre de ce cercle.

2. a) La face latérale d'un cylindre circulaire droit. **b)** Une sphère.

c) Deux plans parallèles situés de part et d'autre de ce plan.

d) Un plan perpendiculaire au segment et qui passe par le milieu du segment.

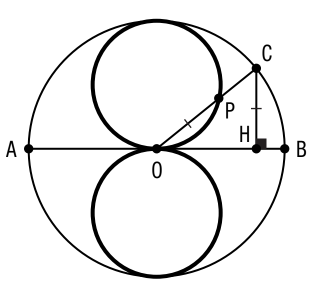
3. a)



b) Le lieu géométrique est un cercle dont la mesure du diamètre correspond à celle du segment AO.

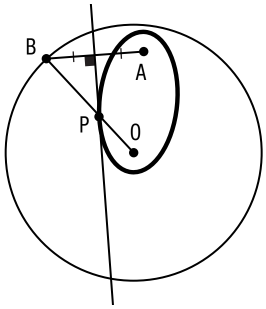
Mise au point 8.1 (*suite*) **Page 254**

4. a)

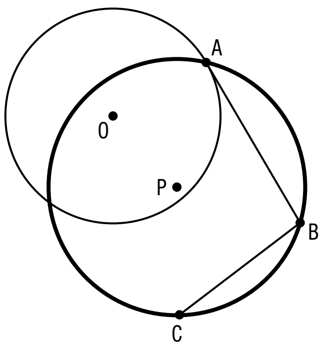


b) Le lieu géométrique est formé de deux cercles tangents entre eux en O et tangents au cercle de centre O. La mesure du diamètre de chacun de ces cercles est la moitié de celle du diamètre du cercle de centre O.

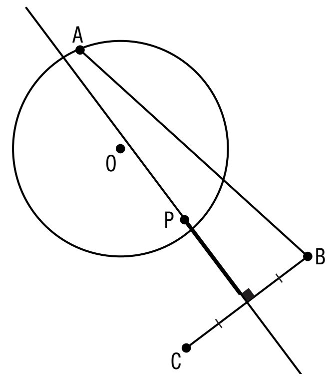
5.



6. a) Il s'agit du cercle de centre P ci-dessous.

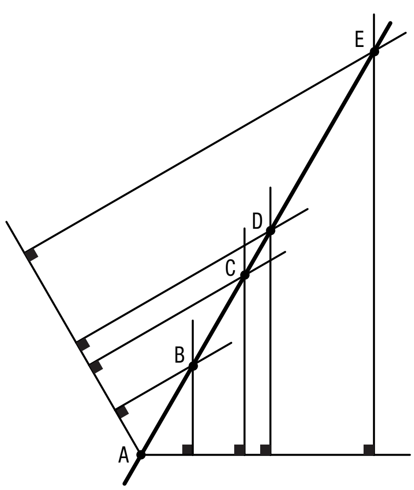


b) Le lieu géométrique est un segment situé sur la médiatrice du segment BC.



Mise au point 8.1 (*suite*) **Page 255**

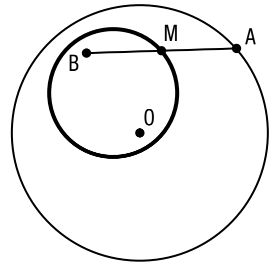
7. a)



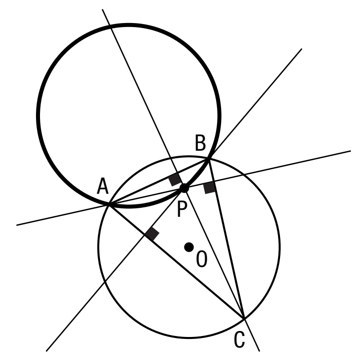
b) La mesure de l'angle est la même de part et d'autre de cette droite.

c) Une bissectrice.

8. La figure décrite est le cercle tracé en gras ci-contre.

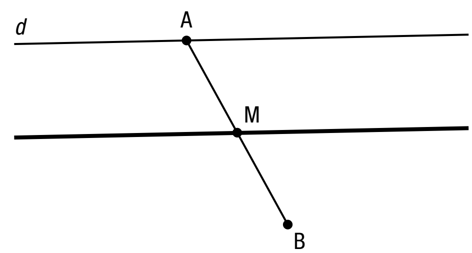


9. Le lieu géométrique est le cercle tracé en gras dans la figure ci-contre.



Mise au point 8.1 (*suite*) **Page 256**

10. Le lieu géométrique est une droite parallèle à la droite *d*.



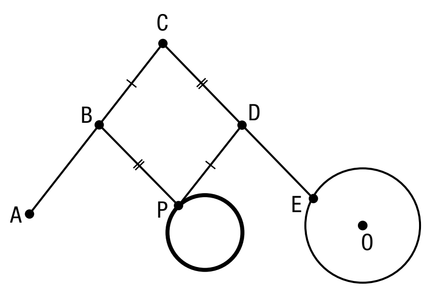
11. a) $y = -\frac{x}{3} + 11$ **b)** (9, 8) **c)** $y = 3x - 19$

d) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* C(3, −10), D(6, −1), E(7, 2) et F(−5, −34).

2) d(A, C) ≈ 19,24 d(B, C) ≈ 19,24 d(A, D) = 10 d(B, D) = 10
d(A, E) ≈ 7,07 d(B, E) ≈ 7,07 d(A, F) ≈ 44,38 d(B, F) ≈ 44,38
On remarque que la distance entre un point de la droite d_2 et le point A est égale à la distance entre ce même point et le point B.

3) Une médiatrice.

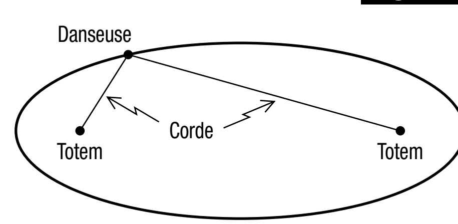
12. Cette trace correspond à un cercle.



SECTION 8.2 Le cercle et l'ellipse

Problème **Page 257**

La figure géométrique engendrée par le déplacement de la danseuse sera une courbe qui ressemble à un cercle qu'on a déformé pour lui donner l'apparence d'un ovale.



Activité 1 **Page 258**

a. 1) d(O, A) = 50 d(O, B) = 50 d(O, C) = 50 d(O, D) = 50
d(O, E) = 50 d(O, F) = 50 d(O, G) = 50 d(O, H) = 50

2) Tous ces points se trouvent à la même distance de l'origine.
3) À un cercle.

b. Au rayon du cercle.

c. **1)** $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2) Comme la distance du point P à l'origine du plan cartésien correspond au rayon r du cercle, on a l'équation $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En élevant au carré chacun des membres de l'équation, on obtient l'équation $r^2 = x^2 + y^2$.

d. $x^2 + y^2 = 50^2$ ou $x^2 + y^2 = 2500$.

e. $d(O, P) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$

f. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Activité 2

Page 259

a. **1)** $21{,}2 + 78{,}8 = 100$ **2)** $58{,}4 + 41{,}6 = 100$ **3)** $68 + 32 = 100$

b. La somme des distances entre le point A et n'importe quel point situé sur le pourtour de l'arène et entre ce même point et le point B est constante, et elle vaut 100 m.

c. **1)** $\frac{(x - 55)^2}{50^2} + \frac{(y - 45)^2}{40^2} = 1$
2) Pour le point C, dont les coordonnées sont (7, 56,2) :
$$\frac{(7 - 55)^2}{50^2} + \frac{(56{,}2 - 45)^2}{40^2} = \frac{2304}{2500} + \frac{125{,}44}{1600} = 0{,}9216 + 0{,}0784 = 1$$
Pour le point D, dont les coordonnées sont (69, 83,4) :
$$\frac{(69 - 55)^2}{50^2} + \frac{(83{,}4 - 45)^2}{40^2} = \frac{196}{2500} + \frac{1474{,}56}{1600} = 0{,}0784 + 0{,}9216 = 1$$
Pour le point E, dont les coordonnées sont (85, 13) :
$$\frac{(85 - 55)^2}{50^2} + \frac{(13 - 45)^2}{40^2} = \frac{900}{2500} + \frac{1024}{1600} = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$$

Technomath

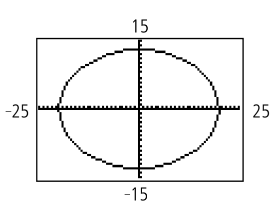
Page 260

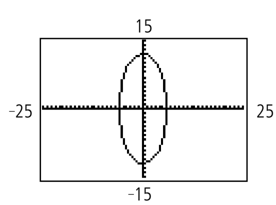
a. **1)** (−10, 0), (10, 0), (0, −2) et (0, 2). **2)** (−10, 0), (10, 0), (0, −5) et (0, 5). **3)** (−10, 0), (10, 0), (0, −8) et (0, 8).

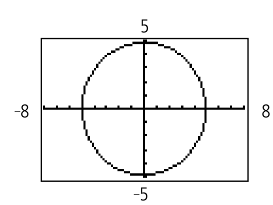
b. **1)** $10 - 2 = 8$ **2)** $10 - 5 = 5$ **3)** $10 - 8 = 2$

c. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Plus l'écart entre les valeurs des paramètres diminue, plus l'ellipse tend vers un cercle.

d. 2A correspond à la longueur de l'axe horizontal et 2B correspond à la longueur de l'axe vertical.

e. **1)**


2)


3)


Mise au point 8.2

Page 264

1. **a)** **1)** 11 **2)** (0, 0) **b)** **1)** 45 **2)** (0, 0)
c) **1)** 7,5 **2)** (5, 0) **d)** **1)** 12,4 **2)** (−12, −4)
e) **1)** 5 **2)** (0, 2) **f)** **1)** $\sqrt{75} \approx 8{,}66$ **2)** (−50, 45)

2. **a)** $x^2 + y^2 = 81$ **b)** $x^2 + y^2 = 702{,}25$ **c)** $(x - 20)^2 + (y + 10)^2 = 169$
d) $(x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 25$ **e)** $x^2 + (y - 10)^2 = 342{,}25$ **f)** $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 30{,}25$

Mise au point 8.2 (*suite*)

3. a) **1)** (0, 0) **2)** (10, 0), (−10, 0), (0, 6) et (0, −6). **3)** (8, 0) et (−8, 0).

b) **1)** (0, 0) **2)** (29, 0), (−29, 0), (0, 21) et (0, −21). **3)** (20, 0) et (−20, 0).

c) **1)** (−3, −4) **2)** (2, −4), (−8, −4), (−3, −8) et (−3, 0). **3)** (0, −4) et (−6, −4).

d) **1)** (0, 12) **2)** (0, 29), (0, −5), (8, 12) et (−8, 12). **3)** (0, 27) et (0, −3).

e) **1)** (10, −4) **2)** (10, 22), (10, −30), (0, −4) et (20, −4). **3)** (10, 20) et (10, −28).

f) **1)** (−5,5, 7,5) **2)** (−16, 7,5), (5, 7,5), (−5,5, 22) et (−5,5, −7). **3)** (−5,5, −2,5) et (−5,5, 17,5).

4. a) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{144}=1$ **b)** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{100}=1$ **c)** $\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y+5)^2}{225}=1$

d) $\frac{(x+8)^2}{100}+\frac{(y-4)^2}{36}=1$ **e)** $\frac{(x-12)^2}{210{,}25}+\frac{(y+8)^2}{110{,}25}=1$ **f)** $\frac{(x-30)^2}{676}+\frac{(y-25)^2}{100}=1$

Mise au point 8.2 (*suite*)

5.

Équation de l'ellipse	Coordonnées du centre	Coordonnées des sommets	Coordonnées des foyers	Longueur du plus grand axe	Longueur du plus petit axe
$\frac{x^2}{2809}+\frac{y^2}{784}=1$	**(0, 0)**	**(53, 0)** **(−53, 0)** **(0, 28)** **(0, −28)**	**(45, 0)** **(−45, 0)**	**106**	**56**
$\frac{(x-8)^2}{81}+\frac{(y+17)^2}{225}=1$	**(8, −17)**	(8, −2) (17, −17) (8, −32) (−1, −17)	**(8, −5)** **(8, −29)**	**30**	**18**
$\frac{(x-5{,}5)^2}{42{,}25}+\frac{(y-2{,}5)^2}{36}=1$	**(5,5, 2,5)**	**(−1, 2,5)** **(5,5, 8,5)** **(12, 2,5)** **(5,5, −3,5)**	(8, 2,5) (3, 2,5)	13	12
$\frac{(x+12)^2}{676}+\frac{(y-10)^2}{100}=1$	**(−12, 10)**	**(14, 10)** **(−38, 10)** **(−12, 20)** **(−12, 0)**	(12, 10) (−36, 10)	52	**20**
$\frac{(x+5)^2}{12{,}25}+\frac{(y+10)^2}{156{,}25}=1$	**(−5, −10)**	**(−8,5, −10)** **(−1,5, −10)** **(−5, 2,5)** **(−5, −22,5)**	(−5, 2) (−5, −22)	**25**	7

6. a) $x^2+y^2=81$ **b)** $x^2+y^2=221$ **c)** $(x+12)^2+(y-8)^2=289$

d) $(x-5)^2+(y+4)^2=56{,}25$ **e)** $(x+8)^2+(y+4)^2=169$ **f)** $(x+5)^2+(y-10)^2=289$

7. a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{144}=1$ **b)** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{625}=1$ **c)** $\frac{(x+20)^2}{90{,}25}+\frac{(y-5)^2}{42{,}25}=1$

d) $\frac{(x-3)^2}{6{,}25}+\frac{(y-6)^2}{1}=1$ **e)** $\frac{(x-10)^2}{11\,025}+\frac{(y-30)^2}{21\,025}=1$ **f)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$

Mise au point 8.2 (*suite*)

8. a) $(x-20)^2+(y-30)^2=400$ **b)** $\frac{(x-20)^2}{400}+\frac{(y-27{,}5)^2}{756{,}25}=1$

9. a) Puisque les valeurs des paramètres a et b sont respectivement 63 et 65, on a :

$$P \approx \pi\left(3(63+65)-\sqrt{(63+3\times 65)(3\times 63+65)}\right)$$
$$\approx \pi(128{,}01)$$
$$\approx 402{,}16 \text{ cm}$$

Le périmètre est environ de 402,16 cm.

b) $A = \pi \times 63 \times 65$
$\approx 12\,864{,}82$ cm^2

L'aire est environ de 12 864,82 cm^2.

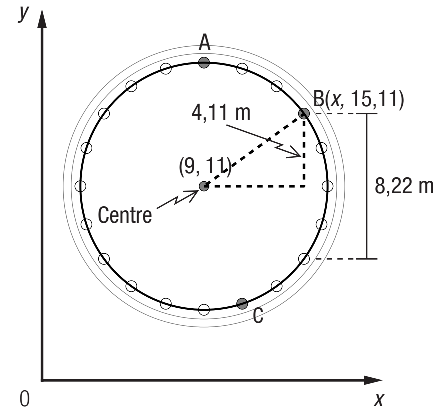
10. a) L'équation du cercle est $(x - 9)^2 + (y - 11)^2 = 49$.

b) 1) Les coordonnées de la colonne A sont (9, 18).

2) Il est possible de déduire que les coordonnées du point B sont (x, 15,11) puisque les colonnes sont toutes situées à égale distance l'une de l'autre. On a donc :

$$(x - 9)^2 + (15{,}11 - 11)^2 = 49$$
$$(x - 9)^2 = 32{,}1079$$

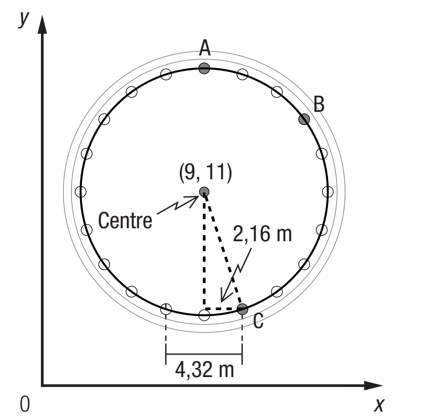
$x_1 \approx 14{,}67$ et $x_2 \approx 3{,}33$.
D'après l'illustration, les coordonnées de la colonne B sont donc ($\approx$ 14,67, 15,11).



3) Il est possible de déduire que les coordonnées du point C sont (11,16, y) puisque les colonnes sont toutes situées à égale distance l'une de l'autre. On a donc :

$$(11{,}16 - 9)^2 + (y - 11)^2 = 49$$
$$(y - 11)^2 = 44{,}3344$$

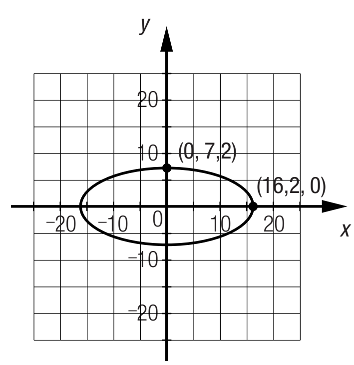
$y_1 \approx 4{,}34$ et $x_2 \approx 17{,}66$.
D'après l'illustration, les coordonnées de la colonne C sont donc (11,16, $\approx$ 4,34).



Mise au point 8.2 (*suite*)

Page 268

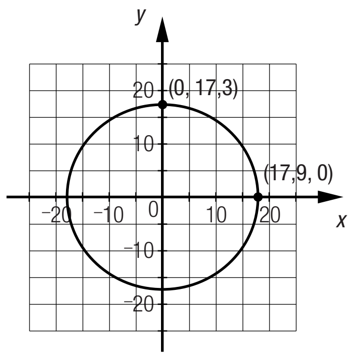
11. a) L'équation du cercle associé à cette situation est $x^2 + y^2 = 81$. La mesure du rayon de la pièce de monnaie est de 9 mm.
Le grand axe mesure $9 \times 2 \times 1{,}8 = 32{,}4$ mm.
Le petit axe mesure $9 \times 2 \div 1{,}25 = 14{,}4$ mm.



b) $\dfrac{x^2}{262{,}44} + \dfrac{y^2}{51{,}84} = 1$

c) On peut déterminer les coordonnées de chaque foyer à l'aide de la relation $a^2 = b^2 + c^2$.
Les coordonnées des foyers sont ($\approx$ −14,51, 0) et ($\approx$ 14,51, 0).

12. a)



b) a = 17,9 et b = 17,3 ⇒ c ≈ 4,6
Les coordonnées des foyers sont (≈ 4,6, 0) et (≈ −4,6, 0).

13. a) Le point C est le point milieu de $\overline{AB}$, ses coordonnées sont donc $\left(\frac{41 + 69}{2}, \frac{12 + 108}{2}\right)$, soit (55, 60). On en déduit que h = 55, k = 60 et que r = 50. L'équation du cercle est donc $(x - 55)^2 + (y - 60)^2 = 2500$.

b) 1) Le coût du cadre en bois est environ de 9,42 $.

2) Le coût de la surface réfléchissante est environ de 15,71 $.

Mise au point 8.2 (*suite*)

Page 269

14. a) Les coordonnées des foyers sont (−90, 0) et (90, 0).

Comme l'équation de la clôture elliptique est $\frac{x^2}{106^2} + \frac{y^2}{56^2} = 1$ et qu'on cherche les coordonnées d'un point dont les coordonnées sont (90, *y*), on peut substituer 90 à *x* et isoler la variable *y.*

$$\frac{90^2}{106^2} + \frac{y^2}{56^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{3136} = \frac{784}{2809}$$
$$y^2 \approx 875{,}27$$
$$y \approx \pm 29{,}58$$

Les coordonnées des points qui correspondent aux quatre coins de la scène sont (90, ≈ 29,58), (90, ≈ −29,58), (−90, ≈ 29,58) et (−90, ≈ −29,58).

b) Puisqu'on cherche un point dont les coordonnées sont (*x*, 41), on peut substituer 41 à *y* dans l'équation de l'ellipse et isoler la variable *x.*

$$\frac{x^2}{106^2} + \frac{41^2}{56^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{11\,236} = \frac{1455}{3136}$$
$$x^2 \approx 5213{,}13$$
$$x \approx \pm 72{,}2$$

Les coordonnées du spectateur sont donc (≈ −72,2, 41).

En effectuant $\sqrt{(-72{,}2)^2 + 41^2}$, on trouve que la distance entre ce point et l'origine du plan cartésien est environ de 83,03 m.

La distance qui sépare le spectateur du chanteur est environ de 83,03 m.

15. a) La piscine **A** a la forme d'un cercle et la piscine **B,** celle d'une ellipse.

b) Piscine A

Puisque la corde tendue mesure 4 m, le rayon du cercle est de 4. L'équation qui correspond au pourtour de cette piscine est $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

Piscine B

Il est possible de déduire les paramètres a et b à partir du paramètre c, qui vaut 3, et de la longueur du grand axe qui est de 10 m.

L'équation qui correspond au pourtour de cette piscine est $\frac{(x - 7)^2}{25} + \frac{(y - 5)^2}{16} = 1$ ou $\frac{(x - 7)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1$.

c) 1) La largeur maximale de la piscine **A** est de 8 m (diamètre du cercle).

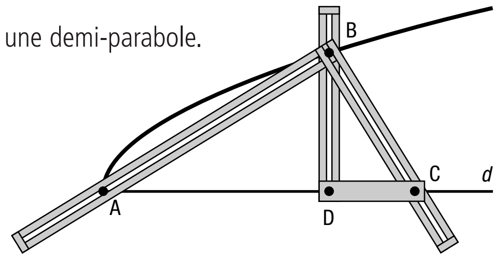
2) La largeur maximale de la piscine **B** est de 10 m (grand axe de l'ellipse).

L'hyperbole et la parabole

Problème

Page 270

Le lieu géométrique engendré par le déplacement du point B est une demi-parabole.



Activité 1

Page 271

a. **1)** 11,25 **2)** 3,25 **3)** 8

b. **1)** 2,25 **2)** 10,25 **3)** 8

c. La valeur absolue de la différence des distances entre tout point de la courbe et les points F_1 et F_2 est constante, et vaut 8.

d. **1)** $\frac{(x-8)^2}{4^2} - \frac{(y-10)^2}{3^2} = 1$

2) Pour le point A, dont les coordonnées sont (13,8, 13,15) :
$\frac{(13{,}8-8)^2}{16} - \frac{(13{,}15-10)^2}{9} = \frac{33{,}64}{16} - \frac{9{,}9225}{9} = 2{,}1025 - 1{,}1025 = 1$
Pour le point B, dont les coordonnées sont (3, 7,75) :
$\frac{(3-8)^2}{16} - \frac{(7{,}75-10)^2}{9} = \frac{25}{16} - \frac{5{,}0625}{9} = 1{,}5625 - 0{,}5625 = 1$

e. **1)** Les pentes des asymptotes sont de $-\frac{3}{4}$ et de $\frac{3}{4}$.

2) Calculs : $\frac{(k+b)-(k-b)}{(h+a)-(h-a)} = \frac{b}{a}$ et $\frac{(k+b)-(k-b)}{(h-a)-(h+a)} = -\frac{b}{a}$. Les pentes des asymptotes sont de $-\frac{b}{a}$ et de $\frac{b}{a}$.

f. **1)** 5

2) Puisque c correspond également à la distance qui sépare le centre de l'hyperbole d'un point du cercle vert, on a :
$c = \sqrt{(h-a-h)^2 + (k-b-k)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

Activité 2

Page 272

a. **1)** 6 **2)** 3 **3)** 9,75 **4)** 15

b. **1)** 6 **2)** 3
3) $\sqrt{(6{,}75-3)^2+(9-0)^2} = 9{,}75$ **4)** $\sqrt{(12-3)^2+(12-0)^2} = 15$

c. Pour chacun des points, la distance est la même.

d. La parabole est une courbe dont tous les points sont situés à égale distance d'une droite fixe, appelée « directrice », et d'un point fixe, appelé « foyer ».

e. On peut passer :
- de 1 à 2, en substituant les coordonnées d'un point de la courbe à x et à y ;
- de 2 à 3, en effectuant les opérations ;
- de 3 à 4, en isolant c.

f. **1)** Elles sont identiques. **2)** Elles sont identiques.

Activité 2 (*suite*)

Page 273

g. **1)** $(x, -c)$ **2)** (x, c) **3)** (c, y) **4)** $(-c, y)$

h. **1)**
$$\begin{aligned} d(P, d) &= d(P, F) \\ \sqrt{(x-x)^2+(y+c)^2} &= \sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} \\ (x-x)^2+(y+c)^2 &= (x-0)^2+(y-c)^2 \\ 0+y^2+2cy+c^2 &= x^2+y^2-2cy+c^2 \\ x^2 &= 4cy \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} d(P, d) &= d(P, F) \\ \sqrt{(x-x)^2+(y-c)^2} &= \sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2} \\ (x-x)^2+(y-c)^2 &= (x-0)^2+(y+c)^2 \\ 0+y^2-2cy+c^2 &= x^2+y^2+2cy+c^2 \\ x^2 &= ^-4cy \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} d(P, d) &= d(P, F) \\ \sqrt{(x-c)^2+(y-y)^2} &= \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} \\ (x-c)^2+(y-y)^2 &= (x+c)^2+(y-0)^2 \\ x^2-2cx+c^2+0 &= x^2+2cx+c^2+y^2 \\ y^2 &= ^-4cx \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} d(P, d) &= d(P, F) \\ \sqrt{(x+c)^2+(y-y)^2} &= \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} \\ (x+c)^2+(y-y)^2 &= (x-c)^2+(y-0)^2 \\ x^2+2cx+c^2+0 &= x^2-2cx+c^2+y^2 \\ y^2 &= 4cx \end{aligned}$$

Activité 3

Page 274

a. **1)** 25 m **2)** 5 m **3)** 10 m **4)** 25 m

b. **1)** $\sqrt{(15-30)^2+(20-40)^2} = 25$ m **2)** $\sqrt{(15-10)^2+(20-20)^2} = 5$ m
3) $\sqrt{(15-15)^2+(20-10)^2} = 10$ m **4)** $\sqrt{(15-30)^2+(20-0)^2} = 25$ m

c. On remarque que la distance qui sépare la boîte de réception d'un point est égale à la distance qui sépare ce même point du capteur.

d. **1)** **i)** 10 **ii)** 20
2) Les valeurs de h et de k correspondent aux coordonnées du sommet de la parabole.

e. On peut passer :
- de ① à ②, en substituant les coordonnées du sommet S(10, 20) à h et à k et les coordonnées d'un autre point, soit D(30, 0), à x et à y ;
- de ② à ③, en simplifiant chaque membre de l'équation ;
- de ③ à ④, en divisant chaque membre de l'équation par 80 pour isoler c.

f. La distance qui sépare la boîte de réception du capteur correspond à 2c.

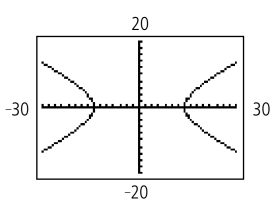
Technomath

Page 275

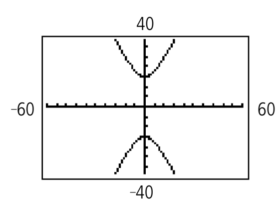
a. **1)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ **2)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ **3)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = 1$

b. **1)** (2, 0) et (⁻2, 0). **2)** (2, 0) et (⁻2, 0). **3)** (2, 0) et (⁻2, 0).

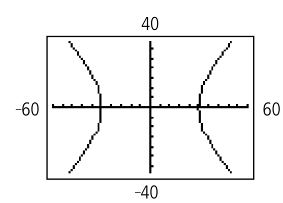
c. **1)**



2)



3)



Mise au point 8.3

Page 280

1. **a)** **1)** (0, 0) **2)** (12, 0) et (⁻12, 0). **3)** (13, 0) et (⁻13, 0).
b) **1)** (0, 0) **2)** (0, 36) et (0, ⁻36). **3)** (0, 45) et (0, ⁻45).
c) **1)** (0, 0) **2)** (16, 0) et (⁻16, 0). **3)** (65, 0) et (⁻65, 0).
d) **1)** (8, ⁻10) **2)** (8, ⁻2) et (8, ⁻18). **3)** (8, 0) et (8, ⁻20).
e) **1)** (0, ⁻12) **2)** (0, 0) et (0, ⁻24). **3)** (0, 0,5) et (0, ⁻24,5).
f) **1)** (⁻20, 15) **2)** (⁻60, 15) et (20, 15). **3)** (⁻61, 15) et (21, 15).

2. **a)** $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = -1$ **b)** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **c)** $\frac{x^2}{3025} - \frac{y^2}{2304} \approx -1$

d) $\frac{(x-25)^2}{1089} - \frac{(y-35)^2}{3136} = 1$ **e)** $\frac{(x+7)^2}{576} - \frac{(y-5)^2}{100} = -1$ **f)** $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{\frac{4}{3}} = 1$

Mise au point 8.3 (*suite*)

Page 281

3. **a)** **1)** $(0, 4)$ **2)** $y = -4$ **b)** **1)** $(-0{,}1, 0)$ **2)** $x = 0{,}1$

c) **1)** $(-12, 6)$ **2)** $x = -2$ **d)** **1)** $(-20, 8{,}75)$ **2)** $y = -8{,}75$

e) **1)** $(-9, 22)$ **2)** $x = 33$ **f)** **1)** $(-9{,}2, 0)$ **2)** $x = 3{,}4$

4. **a)** $x^2 = -24y$ **b)** $(x + 5)^2 = -28{,}8(y - 9)$ **c)** $(y - 2)^2 = -2(x - 4)$

d) $(x - 10)^2 = 80(y + 15)$ **e)** $y^2 = 8x$ **f)** $(y + 0{,}5)^2 = -0{,}4(x - 1{,}5)$

Mise au point 8.3 (*suite*)

Page 282

5.

Équation de la parabole	Coordonnées du sommet	Coordonnées du foyer	Équation de la directrice	Distance entre le foyer et la directrice
$(y + 5)^2 = 36(x - 3)$	**(3, −5)**	**(12, −5)**	$\boldsymbol{x = -6}$	**18**
$(x - 2{,}5)^2 = -0{,}4y$	**(2,5, 0)**	**(2,5, −0,1)**	$\boldsymbol{y = 0{,}1}$	**0,2**
$\boldsymbol{(x - 6)^2 = 20(y + 3)}$	(6, −3)	**(6, 2)**	$y = -8$	**10**
$\boldsymbol{(x - 5)^2 = -26(y + 8)}$	(5, −8)	(5, −14,5)	$\boldsymbol{y = -1{,}5}$	**13**
$\boldsymbol{(y - 3)^2 = -32(x - 15)}$	(15, 3)	**(7, 3)**	$x = 23$	**16**
$\boldsymbol{(y + 6)^2 = 10{,}8(x - 6)}$	(6, −6)	(8,7, −6)	$\boldsymbol{x = 3{,}3}$	**5,4**

6. **a)** $x^2 = -48y$ **b)** $y^2 = 32x$

c) $(x - 5)^2 = 3(y + 3)$ **d)** $(x - 11)^2 = 40(y + 6)$ ou $(x - 11)^2 = -40(y + 6)$.

e) $(y + 3)^2 = -24(x - 4)$ **f)** $(y - 7)^2 = -32(x + 3)$

7. **a)** $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$ **b)** $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{1225} = 1$

c) $\frac{(x-25)^2}{441} - \frac{(y-30)^2}{\frac{233\,282}{583}} = 1$ **d)** $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y+8)^2}{56{,}25} = 1$

e) Puisque l'équation de l'asymptote est $y = -\frac{7}{24}x$, on a :

$\frac{7}{24} = \frac{b}{a}$

$\frac{7}{24} = \frac{42}{a}$

$a = 144$

L'équation de l'hyperbole est donc $\frac{x^2}{20\,736} - \frac{y^2}{1764} = -1$.

f) $\frac{(x+6)^2}{144} - \frac{(y-8)^2}{25} = 1$

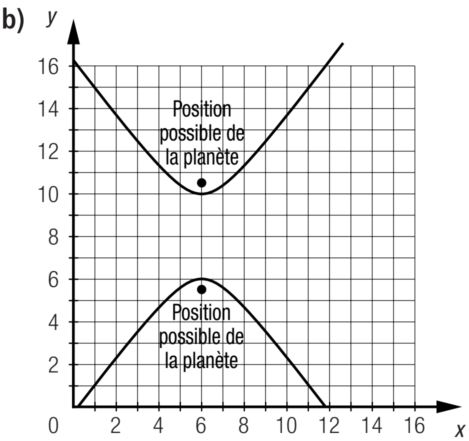
8. Car $-\frac{8}{15}$ est un rapport irréductible équivalent à $-\frac{b}{a}$. On peut donc avoir $b = 8$ et $a = 15$, ou $b = 16$ et $a = 30$, ou $b = 24$ et $a = 45$, etc.

9.

Équation de l'hyperbole	Coordonnées du centre	Coordonnées des sommets	Coordonnées des foyers	Équation des asymptotes
$\frac{x^2}{6400} - \frac{y^2}{324} = 1$	**(0, 0)**	**(80, 0)** **(–80, 0)**	**(82, 0)** **(–82, 0)**	$\boldsymbol{y = -\frac{9}{40}x}$ $\boldsymbol{y = \frac{9}{40}x}$
$\boldsymbol{\frac{x^2}{5929} - \frac{y^2}{1296} = 1}$	**(0, 0)**	(77, 0) (–77, 0)	**(85, 0)** **(–85, 0)**	$y = -\frac{36}{77}x$ $y = \frac{36}{77}x$
$\boldsymbol{\frac{(x - 20)^2}{4225} - \frac{(y + 30)^2}{5184} = -1}$	**(20, –30)**	(20, 42) (20, –102)	(20, 67) (20, –127)	$\boldsymbol{y = -\frac{72}{65}(x - 20) - 30}$ $\boldsymbol{y = \frac{72}{65}(x - 20) - 30}$
$\frac{(x + 9)^2}{506,25} - \frac{(y - 12)^2}{196} = -1$	**(–9, 12)**	**(–9, 26)** **(–9, –2)**	**(–9, 38,5)** **(–9, –14,5)**	$\boldsymbol{y = -\frac{28}{45}(x + 9) + 12}$ $\boldsymbol{y = \frac{28}{45}(x + 9) + 12}$
$\boldsymbol{\frac{(x + 3)^2}{2,25} - \frac{(y + 6)^2}{4} = 1}$	**(–3, –6)**	(–1,5, –6) (–4,5, –6)	(–0,5, –6) (–5,5, –6)	$\boldsymbol{y = -\frac{4}{3}(x + 3) - 6}$ $\boldsymbol{y = \frac{4}{3}(x + 3) - 6}$

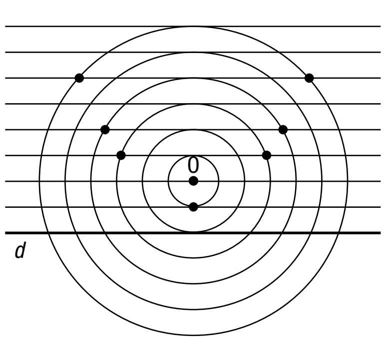
10. a) La planète peut être située au point (6, 10,5) ou au point (6, 5,5).

b)

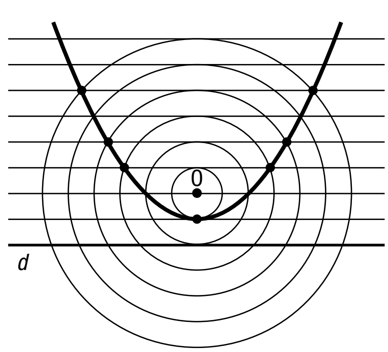


c) 2000 km

11. a) et **b)**



c)



d) Une parabole.

12. a) Puisque les coordonnées du sommet sont (50, 0) et que la trajectoire passe par le point (80, $^-11,25$), l'équation de la parabole associée à la trajectoire du sous-marin est $(x - 50)^2 = {}^-80y$.

b) On cherche la valeur de y lorsque $x = 0$:

$(0 - 50)^2 = {}^-80y$
$2500 = {}^-80y$
$y = {}^-31,25$

La profondeur maximale atteinte par le sous-marin est de 31,25 m.

13. a) 1) $\frac{(x-6)^2}{1} - \frac{(y-9)^2}{4} = 1$ **2)** $y = 2(x - 6) + 9$ et $y = {}^-2(x - 6) + 9$.

b) Les coordonnées des foyers sont $(6 + \sqrt{5}, 9)$ et $(6 - \sqrt{5}, 9)$.

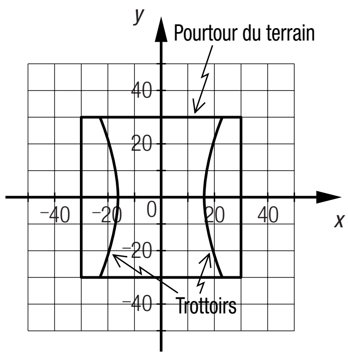
Mise au point 8.3 (*suite*)

Page 285

14. a) Les coordonnées du sommet de la parabole sont (0, 0) et le miroir passe par le point (20, 40). L'équation de la parabole associée au miroir parabolique concave est donc $y^2 = 80x$.

b) Les coordonnées d'un des sommets sont (0, $^-10$) et les coordonnées d'un des foyers sont ($^-26$, 0). On en déduit que a = 10 et b = $\sqrt{26^2 - 10^2} = 24$. L'équation de l'hyperbole est donc $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = 1$.

15. a)



b) La distance minimale est de 32 m. Elle correspond à la distance entre les deux sommets de l'hyperbole.

c) Non, car les coordonnées des foyers de l'hyperbole sont ($^-34$, 0) et (34, 0). Les foyers sont donc situés à l'extérieur du terrain.

16. a) Puisque le tablier du pont correspond à la directrice de la parabole, on déduit que c = 6. De plus, on sait que la courbe passe par le point (0, 19,5) et que k = 6. On a donc :

$(0 - h)^2 = 4 \times 6(19,5 - 6)$
$h^2 = 324$
$h = \pm 18$

D'après le graphique, on déduit que l'équation de la parabole est $(x - 18)^2 = 24(y - 6)$.

b) Les points A et B sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 6$, on en déduit que la distance qui sépare ces deux points est de 36 m.

SECTION 8.4 Les transformations géométriques dans le plan cartésien

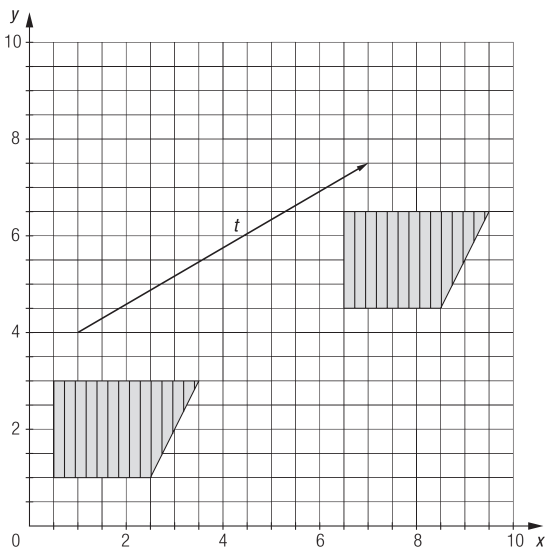
Problème

Page 286

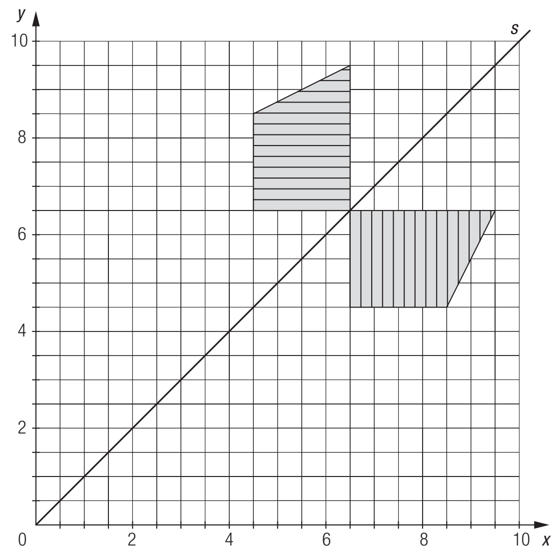
Plusieurs réponses possibles. Exemple :

Deux transformations géométriques successives peuvent associer ces deux emplacements.

Première transformation : une translation.



Deuxième transformation : une réflexion.



Activité 1

Page 287

a. **1)** 34 **2)** −37 **3)** 34 **4)** −37

b. La différence des abscisses est toujours la même et la différence des ordonnées est toujours la même.

c. **1)** (15, −25) **2)** (−7, 9)

Activité 1 (*suite*)

Page 288

d. **1)** $\left(-27, 9\sqrt{7}\right)$ **2)** $\left(9\sqrt{7}, 27\right)$

e. Une rotation de 90° dans le sens horaire permet d'associer des points dont les coordonnées sont $\left(-27, 9\sqrt{7}\right)$ et $\left(9\sqrt{7}, 27\right)$.

f. **1)** $\left(39, -2\sqrt{82}\right)$ **2)** $\left(-2\sqrt{82}, -39\right)$

g. L'abscisse du point B' correspond à l'ordonnée du point B et l'ordonnée du point B' correspond à l'opposé de l'abscisse du point B.

h. Le point de coordonnées (y, $-x$) est associé au point de coordonnées (x, y).

i. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Une rotation de 90° dans le sens horaire (−90°), une rotation de 90° dans le sens antihoraire (90°) ou une rotation de 180° dans le sens horaire ou antihoraire.

Activité 1 (*suite*)

Page 289

j. **1)** A(−8, 24) ; A'(8, 24) **2)** B(−8, 12) ; B'(8, 12) **3)** C(−13, −12) ; C'(13, −12) **4)** D(−3, −12) ; D'(3, −12)

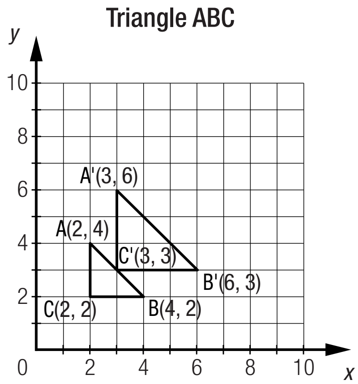
k. Pour chaque paire de points associés par cette transformation, on constate que leurs abscisses sont de signes contraires.

l. Le point de coordonnées ($-x$, y) est associé au point de coordonnées (x, y).

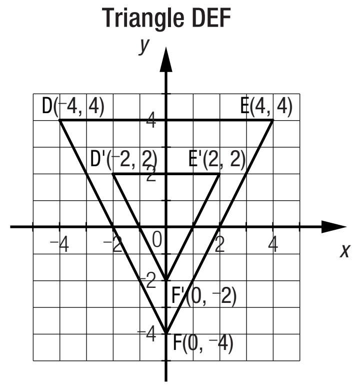
Activité 2

Page 290

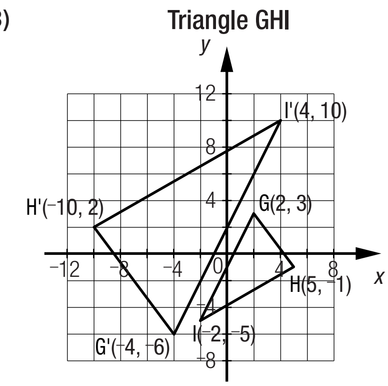
a. **1)**



2)



3)



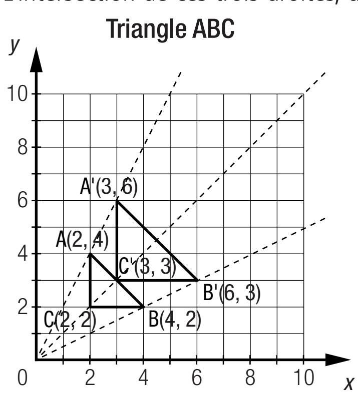
b. **1)** Non. Les figures ne sont pas isométriques, car leurs côtés homologues ne sont pas isométriques.

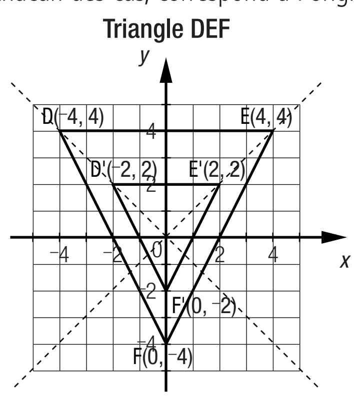
2) Oui. La figure image est semblable à la figure initiale puisque le rapport des mesures des côtés homologues est constant dans chaque cas.

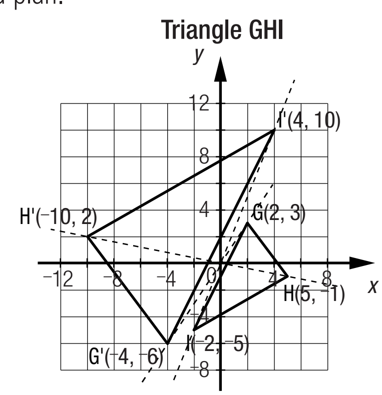
3) Les côtés homologues ont la même inclinaison : ils sont parallèles.

4) Une homothétie.

5) L'intersection de ces trois droites, dans chacun des cas, correspond à l'origine du plan.







6) Dans chacun des cas, il s'agit du rapport d'homothétie, qui équivaut à la valeur par laquelle les coordonnées ont été multipliées.

$$\frac{\text{périmètre}_{\text{triangle A'B'C'}}}{\text{périmètre}_{\text{triangle ABC}}} = \frac{6 + 3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{1{,}5(4 + 2\sqrt{2})}{4 + 2\sqrt{2}} = 1{,}5$$

$$\frac{\text{périmètre}_{\text{triangle D'E'F'}}}{\text{périmètre}_{\text{triangle DEF}}} = \frac{4 + 8\sqrt{5}}{8 + 16\sqrt{5}} = \frac{4(1 + 2\sqrt{5})}{8(1 + 2\sqrt{5})} = 0{,}5$$

$$\frac{\text{périmètre}_{\text{triangle G'H'I'}}}{\text{périmètre}_{\text{triangle GHI}}} = \frac{10 + 2\sqrt{65} + 8\sqrt{5}}{5 + \sqrt{65} + 4\sqrt{5}} = \frac{2(5 + \sqrt{65} + 4\sqrt{5})}{5 + \sqrt{65} + 4\sqrt{5}} = 2$$

Technomath

Page 291

a. **1)** La figure de gauche, dont les coordonnées des sommets sont (−5, 0), (−3, −1) et (−4, −3), correspond à la figure initiale, puisqu'elle est située du même côté que l'origine de la flèche de translation.

2) $(x, y) \mapsto (x + 6, y + 2)$

b. **1)** Le centre de rotation est situé à l'origine du plan.

2) La figure dont les coordonnées des sommets sont (−3, −5), (1, −4) et (−1, −2) correspond à la figure image. Puisque l'angle de rotation est positif, la rotation s'effectue dans le sens antihoraire.

3) $(x, y) \mapsto (-y, x)$

c. 1) L'axe de réflexion est situé sur l'axe des abscisses. **2)** $(x, y) \mapsto (x, -y)$

d. La règle qui permet d'obtenir les coordonnées des sommets d'un triangle image à partir des coordonnées des sommets d'un triangle initial pour une SYMÉTRIE CENTRALE par rapport à l'origine du plan cartésien est $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

Mise au point 8.4

Page 295

1. a)

Point initial	Point image d'après la rotation $r_{(O, -90°)}$
A(2, 5)	A'(**5**, **−2**)
B(−2, 0)	B'(**0**, **2**)
C(15, 9)	C'(**9**, **−15**)

b)

Point initial	Point image d'après la translation $t_{(-6, 3)}$
D(4, 8)	D'(**−2**, **11**)
E(−5, 12)	E'(**−11**, **15**)
F(0, 14)	F'(**−6**, **17**)

c)

Point initial	Point image d'après l'homothétie $h_{(O, -4)}$
G(3, 9)	G'(**−12**, **−36**)
H(−8, 5)	H'(**32**, **−20**)
I(−4, 0)	I'(**16**, **0**)

d)

Point initial	Point image d'après la réflexion s_y
J(−4, 7)	J'(**4**, **7**)
K(0, 13)	K'(**0**, **13**)
L(−30, 0)	L'(**30**, **0**)

e)

Point initial	Point image d'après l'homothétie $h_{(O, 3)}$
M(7, −5)	M'(**21**, **−15**)
N(0, 0)	N'(**0**, **0**)
O(−3, 2)	O'(**−9**, **6**)

f)

Point initial	Point image d'après la rotation $r_{(O, 270°)}$
P(2, 5)	P'(**5**, **−2**)
Q(−2, 0)	Q'(**0**, **2**)
R(15, 9)	R'(**9**, **−15**)

g)

Point initial	Point image d'après l'homothétie $h_{(O, 0,4)}$
S(−5, 10)	S'(**−2**, **4**)
T(20, 30)	T'(**8**, **12**)
U(15, 25)	U'(**6**, **10**)

h)

Point initial	Point image d'après la rotation $r_{(O, 90°)}$
V(−6, −4)	V'(**4**, **−6**)
W(3, 8)	W'(**−8**, **3**)
X(0, 0)	X'(**0**, **0**)

i)

Point initial	Point image d'après la translation $t_{(5, -8)}$
Y(−3, −5)	Y'(**2**, **−13**)
Z(9, 0)	Z'(**14**, **−8**)
A(−2, 8)	A'(**3**, **0**)

2. a) $t_{(6, -10)} : (x, y) \mapsto (x + 6, y - 10)$ **b)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O, 180°)} : (x, y) \mapsto (-x, -y)$

c) $s_y : (x, y) \mapsto (-x, y)$ **d)** $s_x : (x, y) \mapsto (x, -y)$

e) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O, 90°)} : (x, y) \mapsto (-y, x)$ **f)** $h_{(O, 2,5)} : (x, y) \mapsto (2,5x, 2,5y)$

g) $h_{\left(O, -\frac{1}{7}\right)} : (x, y) \mapsto \left(-\frac{x}{7}, -\frac{y}{7}\right)$

Mise au point 8.4 (*suite*)

Page 296

3. a) A'(−15, −4) **b)** A'(−60, 16) **c)** A'(15, −4) **d)** A'(−12, −3) **e)** A'(30, −8)

4. a) 1) $h_{(O, 3)} : (x, y) \mapsto (3x, 3y)$
2) B'(15, 18) ; C'(18, 6)

b) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O, 90°)} : (x, y) \mapsto (-y, x)$
2) B'(−7, 9) ; C'(6, 7)

c) 1) $h_{(O, -2)} : (x, y) \mapsto (-2x, -2y)$
2) B'(0, 6) ; C'(12, 10)

d) 1) $s_x : (x, y) \mapsto (x, -y)$
2) B'(5, −6) ; C'(2, 8)

e) 1) $t_{(-4, 6)} : (x, y) \mapsto (x - 4, y + 6)$
2) B'(−6, −2) ; C'(−4, 2)

f) 1) $s_y : (x, y) \mapsto (-x, y)$
2) B'(−10, 0) ; C'(−2, 0)

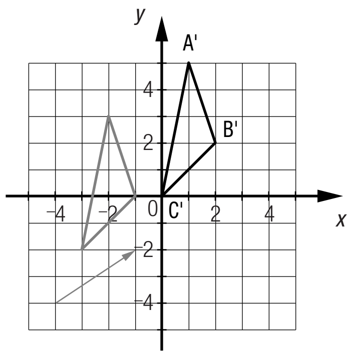
g) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O, 180°)} : (x, y) \mapsto (-x, -y)$
2) B'(−7, 3) ; C'(4, 7)

h) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O, -90°)} : (x, y) \mapsto (y, -x)$
2) B'(−2, 1) ; C'(−4, 1)

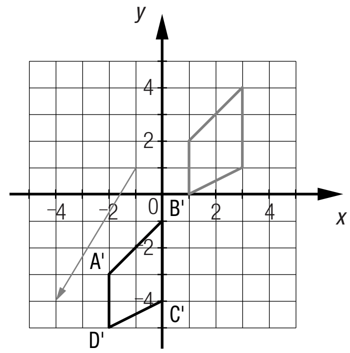
i) 1) $t_{(10, 4)} : (x, y) \mapsto (x + 10, y + 4)$
2) B'(6, −4) ; C'(0, 6)

Mise au point 8.4 (*suite*)

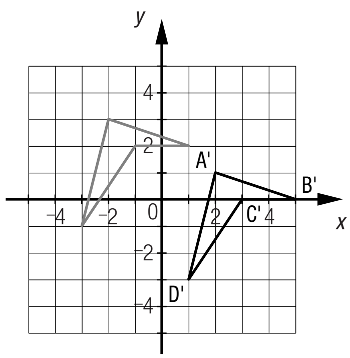
5. a)



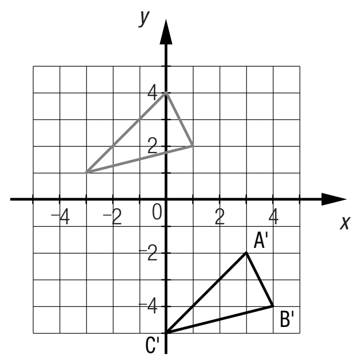
b)



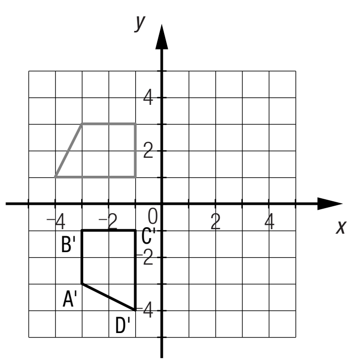
c)



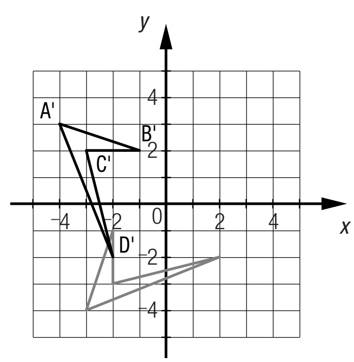
d)



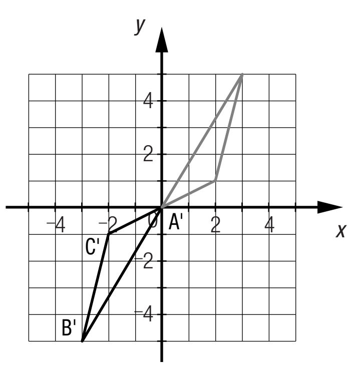
6. a)



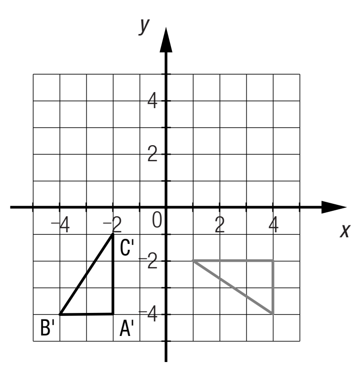
b)



c)

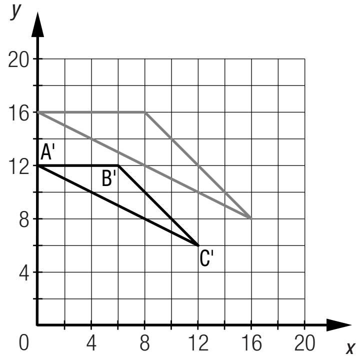


d)

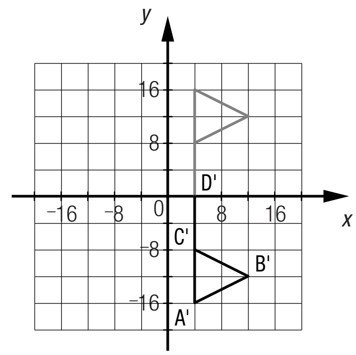


Mise au point 8.4 (*suite*)

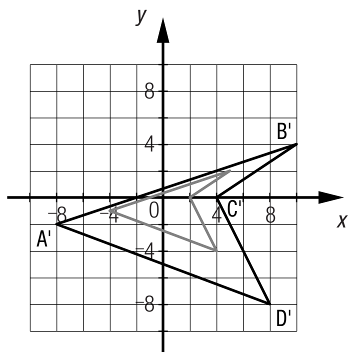
7. a)



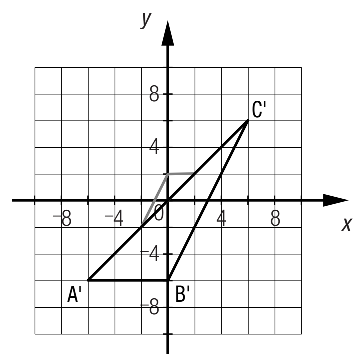
b)



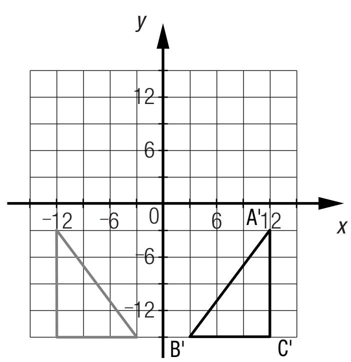
c)



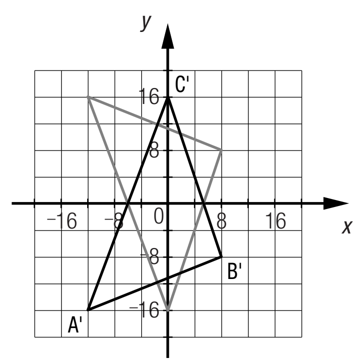
d)



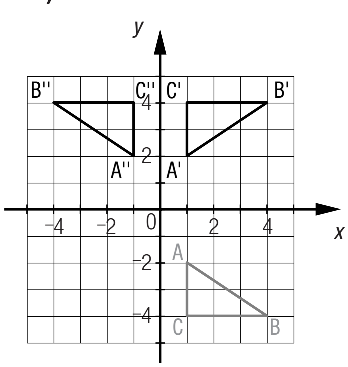
e)



f)



8. a) et **b)**



c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O,\ 180°)}$ ou $h_{(O,\ -1)}$.

Mise au point 8.4 (*suite*)

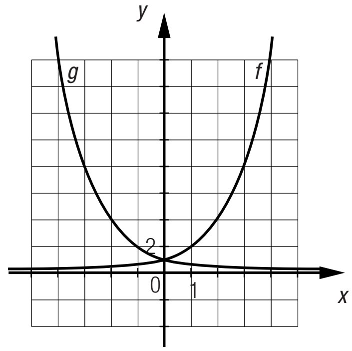
9. a)

x	$f(x)$
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	**1**
1	**2**
2	**4**
3	**8**

x	$g(x)$
−3	**8**
−2	**4**
−1	**2**
0	**1**
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

b) Pour une même abscisse, les ordonnées correspondantes sont l'inverse l'une de l'autre.

c)



d) $s_y : (x, y) \mapsto (-x, y)$.

10. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* À une rotation centrée à l'origine de 180° dans le sens horaire.

11. a) A'(−8, −5)

b) A'(−2, 9)

c) 1) Les résultats ne sont pas les mêmes.

2) L'ordre dans lequel une série de transformations géométriques sont effectuées a une incidence sur les coordonnées d'un point image.

12. a) A'(1,5, 1,5) B'(7,5, 6) C'(13,5, 1,5) D'(7,5, 1,5)

b) A'(1, −1) B'(4, −5) C'(1, −9) D'(1, −5)

c) A'(1, −1) B'(5, −4) C'(9, −1) D'(5, −1)

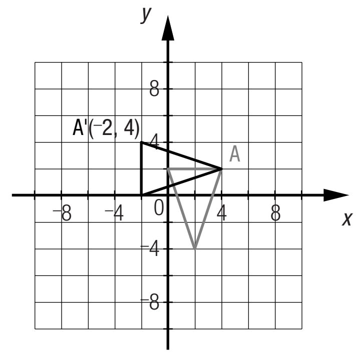
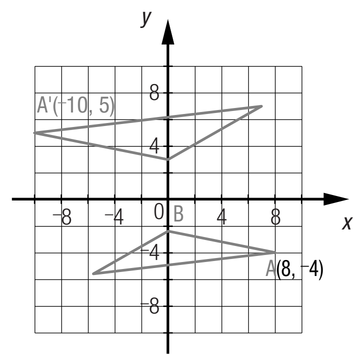
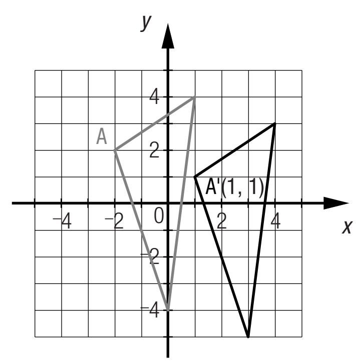
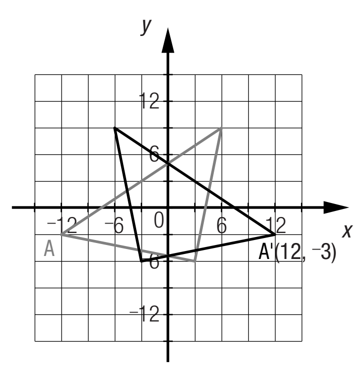
d) A'(7, 14) B'(11, 17) C'(15, 14) D'(11, 14)

Mise au point 8.4 (*suite*)

13. a) 4 **b)** 8 **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** −1,5

Mise au point 8.4 (*suite*)

14.

<table>
<tr><th></th><th>Règle de transformation</th><th>Description</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$r_{(0,\,90°)}$</td><td>Rotation centrée à l'origine de 90° dans le sens antihoraire</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$h_{(0,\,-\frac{5}{4})}$</td><td>**Homothétie centrée à l'origine de rapport $-\frac{5}{4}$**</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$t_{(3,\,-1)}$</td><td>**Ajout de 3 unités en abscisse et retrait de 1 unité en ordonnée**</td><td>
</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>s_y</td><td>Réflexion par rapport à l'axe des ordonnées</td><td>
</td></tr>
</table>

Les matrices

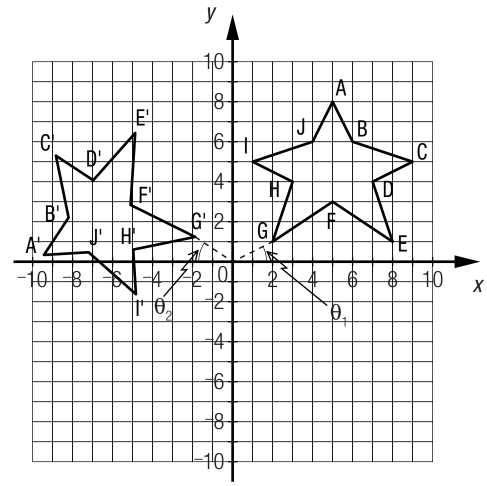
Problème

Page 302

Il est possible de déterminer les coordonnées de chaque sommet à l'aide des relations trigonométriques.

Voici un exemple où le point O correspond à l'origine :

- m $\overline{OG}$ = m $\overline{OG'} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$
- $\theta_1 = \arctan\frac{1}{2}$, soit $\approx 26{,}57°$
- $\theta_2 \approx 180° - (120° + 26{,}57°) \approx 33{,}43°$
- Abscisse de G' $\approx {}^{-}\sqrt{5}\cos 33{,}43° \approx {}^{-}1{,}87$
- Ordonnée de G' $\approx \sqrt{5}\sin 33{,}43° \approx 1{,}23$



Par un raisonnement similaire, on trouve les coordonnées des sommets images :

A'(≈ ⁻9,43, ≈ 0,33), B'(≈ ⁻8,2, ≈ 2,2), C'(≈ ⁻8,83, ≈ 5,29), D'(≈ ⁻6,96, ≈ 4,06), E'(≈ ⁻4,87, ≈ 6,43), F'(≈ ⁻5,1, ≈ 2,83), G'(≈ ⁻1,87, ≈ 1,23), H'(≈ ⁻4,96, ≈ 0,6), I'(≈ ⁻4,83, ≈ ⁻1,63) et J'(≈ ⁻7,2, ≈ 0,46).

Activité 1

Page 303

a. **1)** 7 lignes. **2)** 2 colonnes.

b. **1)** Au nombre de lignes. **2)** Au nombre de colonnes.

c. **1)** Au « nom » de la matrice.
2) À la ligne sur laquelle se trouve cet élément.
3) À la colonne dans laquelle se trouve cet élément.

d. **1)** 4 **2)** ⁻1 **3)** ⁻4

e. **1)** a_{46} **2)** a_{m7} **3)** a_{5n} **4)** a_{mn}

Activité 2

Page 304

a. Pour multiplier une matrice par un scalaire, on multiplie chaque élément de la matrice par le scalaire.

b. $b_{21} = 2 \times {}^{-}8 = {}^{-}16$
$b_{22} = 2 \times 1 = 2$
$b_{31} = 2 \times 0 = 0$
$b_{32} = 2 \times {}^{-}6 = {}^{-}12$

c. Pour additionner deux matrices, on additionne les éléments qui occupent la même position dans chacune des matrices.

d. $e_{13} = {}^{-}12 + 12 = 0$
$e_{21} = {}^{-}5 + {}^{-}11 = {}^{-}16$
$e_{22} = 4 + 13 = 17$
$e_{23} = {}^{-}20 + 22 = 2$

Activité 2 (*suite*)

Page 305

e. Si les dimensions des deux matrices sont les mêmes.

f. On remarque que $c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31}$.
De plus, $c_{12} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32}$, et ainsi de suite.

g. $h_{21} = {}^-1 \times {}^-3 + {}^-2 \times 6 + 7 \times 8 = 47$
$h_{22} = {}^-1 \times 4 + {}^-2 \times 0 + 7 \times 1 = 3$

h. **1)** 2×3 **2)** 3×2 **3)** 2×2

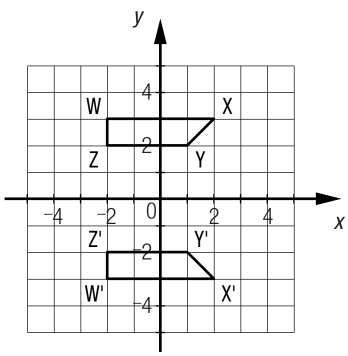
i. **1)** Si le nombre de colonnes de la première matrice est le même que le nombre de lignes de la deuxième matrice.
2) Elle aura le même nombre de lignes que la première matrice et le même nombre de colonnes que la deuxième matrice.

Activité 3 **Page 306**

a. **1)** Aux coordonnées du sommet W. **2)** Aux coordonnées du sommet X.
3) Aux coordonnées du sommet Y. **4)** Aux coordonnées du sommet Z.

b.
$$C = A \times B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 1 + 3 \times 0 & -2 \times 0 + 3 \times -1 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times -1 \\ 1 \times 1 + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times -1 \\ -2 \times 1 + 2 \times 0 & -2 \times 0 + 2 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

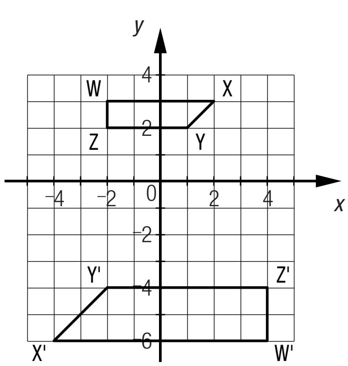
c. **1)**



2) Une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
3) $s_x : (x, y) \mapsto (x, -y)$

d.
$$E = A \times D = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times -2 + 3 \times 0 & -2 \times 0 + 3 \times -2 \\ 2 \times -2 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times -2 \\ 1 \times -2 + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times -2 \\ -2 \times -2 + 2 \times 0 & -2 \times 0 + 2 \times -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -4 & -6 \\ -2 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

e. **1)**

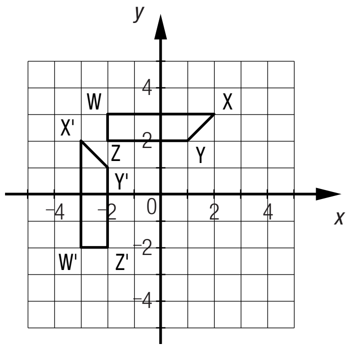


2) Une homothétie dont le centre est l'origine du plan cartésien et dont le rapport est $^-2$.
3) $h_{(0, -2)} : (x, y) \mapsto (-2x, -2y)$

Activité 3 (*suite*) **Page 307**

f.
$$G = A \times F = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos 90° & \sin 90° \\ -\sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 0 + 3 \times -1 & -2 \times 1 + 3 \times 0 \\ 2 \times 0 + 3 \times -1 & 2 \times 1 + 3 \times 0 \\ 1 \times 0 + 2 \times -1 & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ -2 \times 0 + 2 \times -1 & -2 \times 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

g. 1)



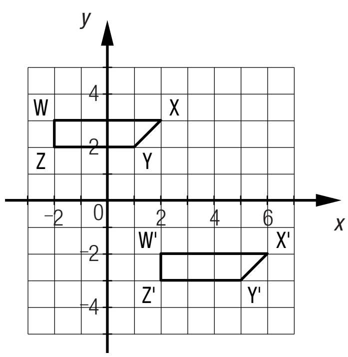
2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
Une rotation centrée à l'origine du plan cartésien de 90° dans le sens antihoraire.

3) $r_{(O,\,90°)} : (x, y) \mapsto (-y, x)$

h.

$$J = H \times I = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 4 & -2 \times 0 + 3 \times 1 + 1 \times -5 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 4 & 2 \times 0 + 3 \times 1 + 1 \times -5 \\ 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 4 & 1 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times -5 \\ -2 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 4 & -2 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -2 \\ 5 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

i. 1)



2) Une translation de 4 unités vers la droite et de 5 unités vers le bas.

3) $t_{(4,\,-5)} : (x, y) \mapsto (x + 4, y - 5)$

Technomath

Page 308

a. 1) 2×3 **2)** 3×2

b. 1) 6 **2)** −4 **3)** 3 **4)** −2

c. $A \times B \neq B \times A$. La matrice résultante de $A \times B$ est une matrice de dimension 2×2 alors que la matrice résultante de $B \times A$ est une matrice de dimension 3×3.

d. 1) $\begin{pmatrix} -13 & 18 & 0 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 6 & -9 & 11 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} -10 & 4 & -8 \\ -14 & 12 & -6 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 47 \\ 69 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} -9 & 11 & 1 \\ -8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **6)** Impossible.

Mise au point 8.5

Page 313

1. a) 1) 4 **2)** 5 **3)** 4×5 **4)** 20
b) 1) 2 **2)** 3 **3)** 2×3 **4)** 6
c) 1) 4 **2)** 2 **3)** 4×2 **4)** 8

2. a) 7 **b)** −14 **c)** 6 **d)** 20 **e)** 17 **f)** 8

3. a) $\begin{pmatrix} 34 \\ 20 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -5 & 10 \\ -1 & 15 \\ 2 & 19 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 5 & 35 \\ 60 & -15 \\ 55 & 45 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 20 & 14 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -4 & -20 & 12 \\ 8 & -24 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 24 & 56 & 96 & -72 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -3 & -9 \\ 21 & 27 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \\ 35 & 40 & 45 \end{pmatrix}$

Mise au point 8.5 (*suite*)

5. a) $\begin{pmatrix} 34 & 82 \\ 14 & 30 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 59 & 89 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 29 & 4 \\ 26 & 54 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 32 & 19 \\ -8 & 9 \\ -13 & -11 \\ -16 & -2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 78 \\ -60 \\ 88 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 16 & 35 \end{pmatrix}$

6. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \cos 180° & \sin 180° \\ -\sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} \cos -90° & \sin -90° \\ -\sin -90° & \cos -90° \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. a) Une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
b) Une translation de 6 unités vers la droite et de 2 unités vers le bas.
c) Une homothétie dont le centre est l'origine du plan cartésien et dont le rapport est 8.
d) Une rotation centrée à l'origine du plan cartésien de 180° dans le sens antihoraire.
e) Une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.
f) Une translation de 5 unités vers la gauche et de 9 unités vers le bas.
g) Une homothétie dont le centre est l'origine du plan cartésien et dont le rapport est −5.
h) Une rotation centrée à l'origine du plan cartésien de 90° dans le sens antihoraire.

8. a) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 82 & 82 \\ 22 & 86 \\ -66 & -94 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 82 & 82 \\ 22 & 86 \\ -66 & -94 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} -14 & 44 \\ 13 & -24 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} -6 & 37 \\ 34 & -68 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$

Mise au point 8.5 (*suite*)

9. a) 1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **2)** B'(9, 18) et C'(18, 9).

b) 1) $\begin{pmatrix} \cos 90° & \sin 90° \\ -\sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}$ **2)** B'(−8, 12) et C'(−5, 9).

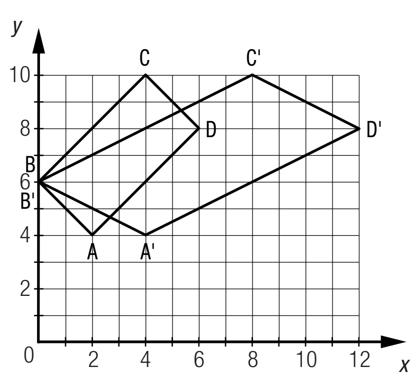
c) 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **2)** B'(8, −8) et C'(5, −4).

d) 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$ **2)** B'(−3, −8) et C'(5, −4).

e) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $\begin{pmatrix} \cos 180° & \sin 180° \\ -\sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}$ **2)** B'(2, −3) et C'(4, −9).

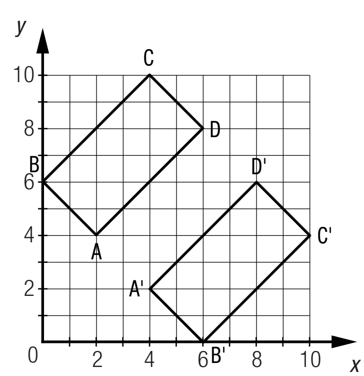
f) 1) $\begin{pmatrix} \cos -90° & \sin -90° \\ -\sin -90° & \cos -90° \end{pmatrix}$ **2)** B'(0, 2) et C'(−8, 4).

10. a) 1)



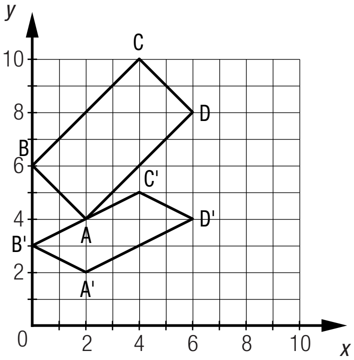
2) Une dilatation horizontale dont les abscisses sont multipliées par 2.

b) 1)



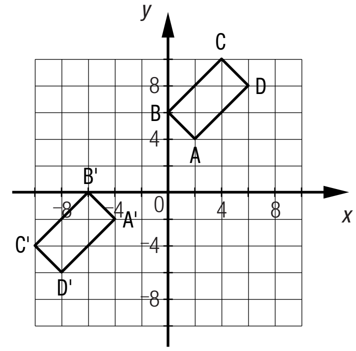
2) Une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$.

c) 1)



2) Une contraction verticale dont les ordonnées sont multipliées par 0,5.

d) 1)



2) Une réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Mise au point 8.5 (*suite*) **Page 316**

11. a) Au nombre d'appareils du modèle C en magasin avant la vente.

b) Au nombre d'appareils du modèle D en magasin avant la vente.

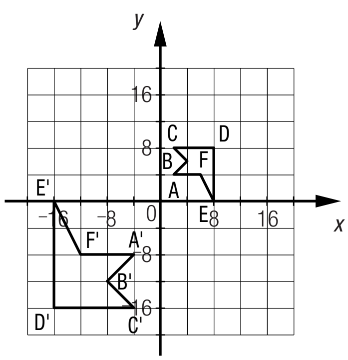
c) Au nombre d'appareils du modèle B en magasin après la vente.

d) Au nombre d'appareils du modèle E en magasin après la vente.

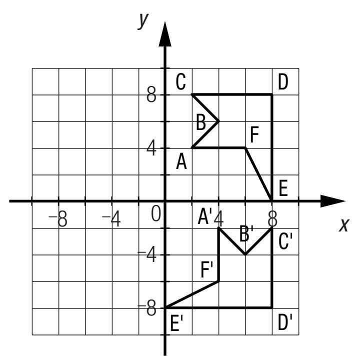
e) Au nombre d'appareils de chaque modèle qui a été vendu.

12. Le nombre de colonnes de la matrice de dimension 5×3, soit 3, ne correspond pas au nombre de lignes de la matrice de dimension 2×4, soit 2.

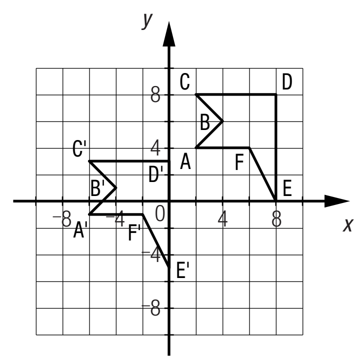
13. a)



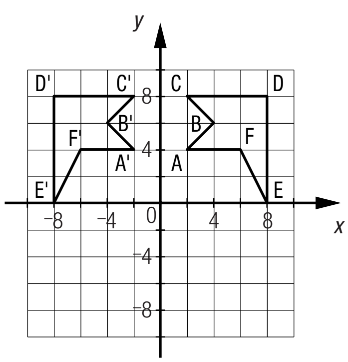
b)



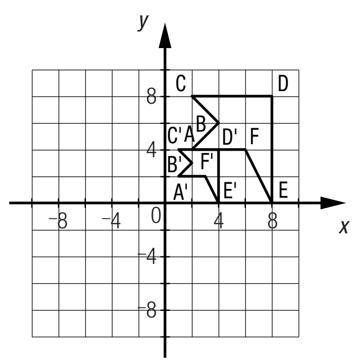
c)



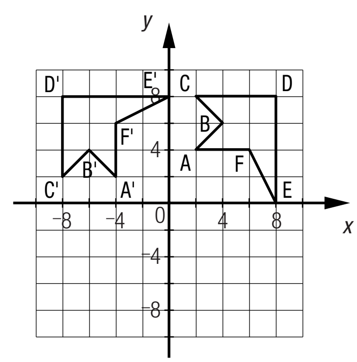
d)



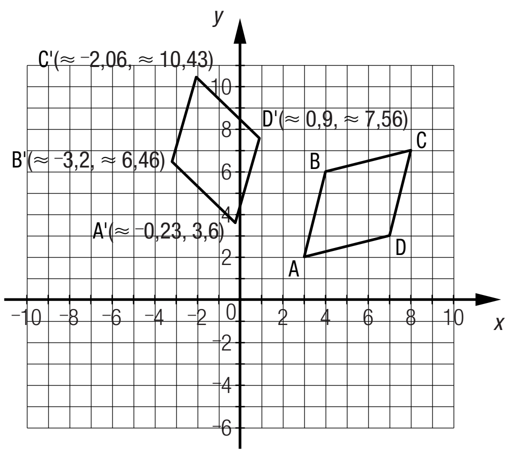
e)



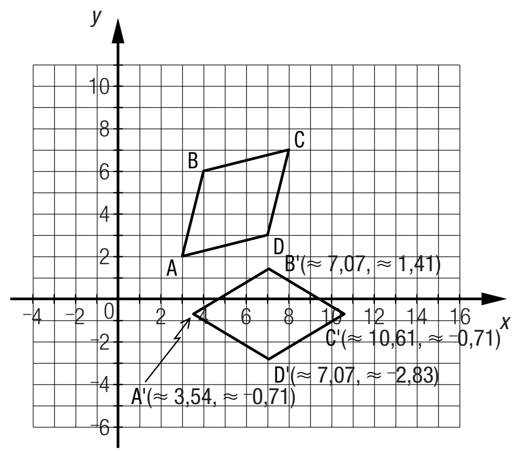
f)



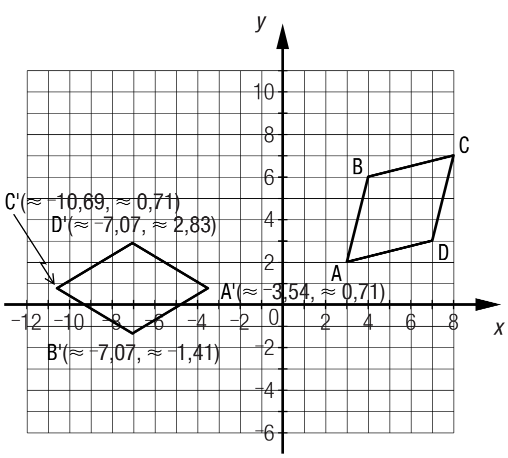
14. a) En utilisant la matrice de rotation $r_{(O,\ 60°)} = \begin{pmatrix} \cos 60° & \sin 60° \\ -\sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}$, il est possible de déterminer les coordonnées de chaque point image.



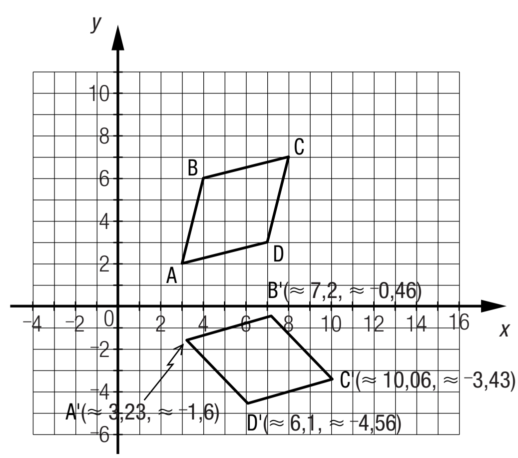
b) En utilisant la matrice de rotation $r_{(O,\ -45°)} = \begin{pmatrix} \cos -45° & \sin -45° \\ -\sin -45° & \cos -45° \end{pmatrix}$, il est possible de déterminer les coordonnées de chaque point image.



c) En utilisant la matrice de rotation $r_{(O,\ 135°)} = \begin{pmatrix} \cos 135° & \sin 135° \\ -\sin 135° & \cos 135° \end{pmatrix}$, il est possible de déterminer les coordonnées de chaque point image.

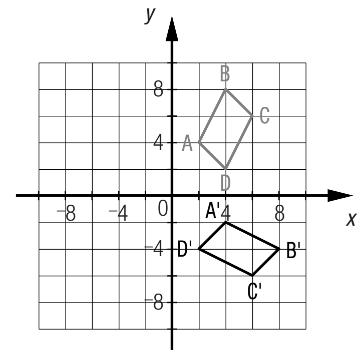
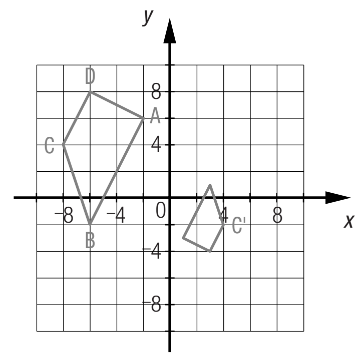
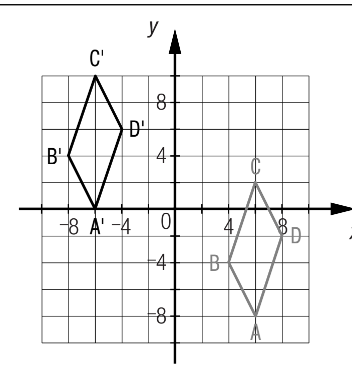
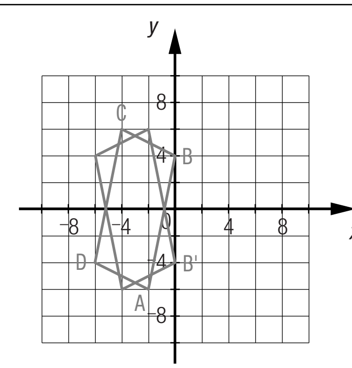


d) En utilisant la matrice de rotation $r_{(O,\ 300°)} = \begin{pmatrix} \cos 300° & \sin 300° \\ -\sin 300° & \cos 300° \end{pmatrix}$, il est possible de déterminer les coordonnées de chaque point image.



15. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \cos -90° & \sin -90° \\ -\sin -90° & \cos -90° \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} \cos 180° & \sin 180° \\ -\sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

16.

	Matrice de transformation	Description	Représentation graphique
a)	$\begin{pmatrix} \cos -90° & \sin -90° \\ -\sin -90° & \cos -90° \end{pmatrix}$	Rotation centrée à l'origine de 90° dans le sens horaire	
b)	$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$	**Homothétie centrée à l'origine de rapport −0,5**	
c)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$	Retrait de 12 unités en abscisse et ajout de 8 unités en ordonnée	
d)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	**Réflexion par rapport à l'axe des abscisses**	

Mise au point 8.5 (*suite*)

Page 319

17. a) $A - B = \begin{pmatrix} 20 & 28 & 6 \\ 8 & 38 & 35 \end{pmatrix}$

b) $0{,}4A = \begin{pmatrix} 16{,}80 & 23{,}20 & 6{,}40 \\ 10{,}80 & 33{,}20 & 30{,}40 \end{pmatrix}$

c) Pour réaliser le profit escompté sur chaque article, tous les éléments de la matrice résultante de (A − B) − 0,4A devraient être supérieurs ou égaux à 0, or :

$$(A - B) - 0{,}4A = \begin{pmatrix} 20 & 28 & 6 \\ 8 & 38 & 35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16{,}80 & 23{,}20 & 6{,}40 \\ 10{,}80 & 33{,}20 & 30{,}40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}20 & 4{,}80 & -0{,}40 \\ -2{,}80 & 4{,}80 & 4{,}60 \end{pmatrix}$$

Puisque deux éléments de la matrice résultante sont inférieurs à 0, le prix de vente actuel ne permet pas de réaliser le profit escompté sur chaque article.

18. a) $\begin{pmatrix} 8 & 20 & 12 \\ 16 & 20 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 20 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

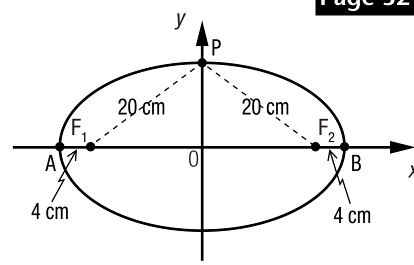
c) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

RUBRIQUES PARTICULIÈRES 8

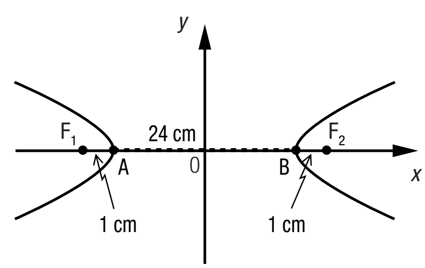
Chronique du passé

Page 321

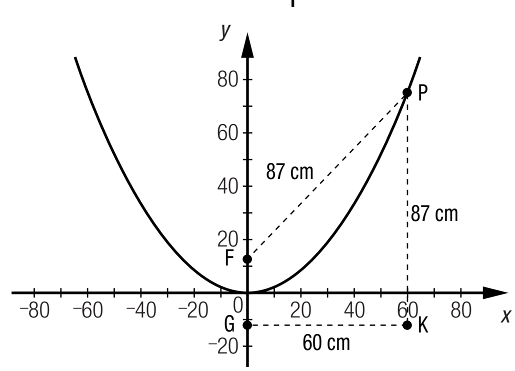
1. Dans la figure ①, on sait que m $\overline{PD}$ = 29,6 cm, m $\overline{PC}$ = 10,4 cm,
m $\overline{PF_1}$ + m $\overline{PF_2}$ = m $\overline{CD}$ et m $\overline{PF_1}$ + m $\overline{PF_2}$ = 2a.
On en déduit que m $\overline{CD}$ = 10,4 + 29,6 = 40 cm, m $\overline{PF_1}$ + m $\overline{PF_2}$ = 40 cm et 2a = 40 cm. On peut faire la représentation graphique ci-contre.
On peut en déduire que le plus petit axe mesure 24 cm, car $20^2 = b^2 + (20 - 4)^2 \Rightarrow b = 12$ cm.
Donc, la longueur du plus grand axe est de 40 cm et celle du plus petit axe est de 24 cm.



2. Dans la figure ②, on sait que m $\overline{PD}$ = 32,8 cm, m $\overline{PC}$ = 8,8 cm,
m $\overline{PF_2}$ − m $\overline{PF_1}$ = m $\overline{CD}$ et m $\overline{PF_2}$ − m $\overline{PF_1}$ = 2a.
On en déduit que m $\overline{CD}$ = 32,8 − 8,8 = 24 cm, m $\overline{PF_2}$ − m $\overline{PF_1}$ = 24 cm et 2a = 24 cm. On peut faire la représentation graphique ci-contre.
On peut en déduire que la distance entre les deux foyers de l'hyperbole est de 26 cm.

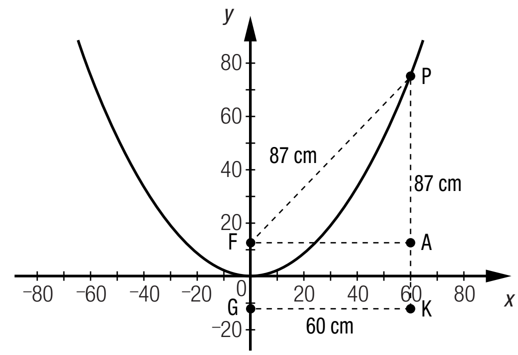


3. Comme la parabole est une courbe dont tous les points sont situés à égale distance d'une droite fixe, appelée « directrice », et d'un point fixe, appelé « foyer », il est possible de faire la représentation graphique ci-contre.



La relation de Pythagore permet d'établir que
d(A, P) $= \sqrt{87^2 - 60^2} = 63$ cm.

La distance entre la directrice et le foyer est de 87 cm $-$ 63 cm $=$ 24 cm. La distance entre le foyer et le sommet de la parabole est donc de 24 cm $\div$ 2 $=$ 12 cm.



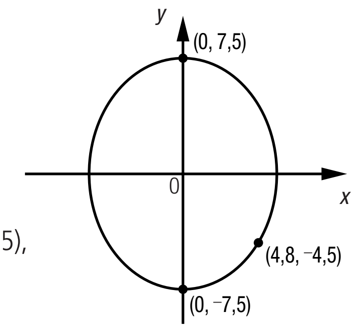
Le monde du travail

Page 323

1. a) L'équation associée à cette ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, et on a :

$$\frac{4{,}8^2}{a^2} + \frac{(-4{,}5)^2}{7{,}5^2} = 1$$
$$\frac{4{,}8^2}{a^2} = 0{,}64$$
$$a^2 = 36$$

De plus, puisque $b^2 = a^2 + c^2$, on a $c = \sqrt{7{,}5^2 - 36} = 4{,}5$.
Les coordonnées des sommets sont donc (−6, 0), (0, 7,5), (6, 0) et (0, −7,5), et les coordonnées des foyers sont (0, −4,5) et (0, 4,5).



b) L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{56{,}25} = 1$.

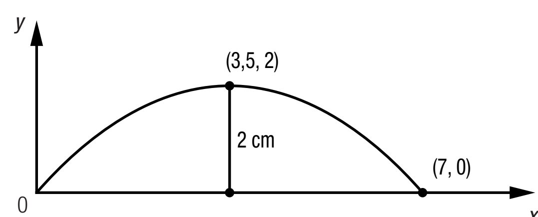
2. Il est possible de déterminer la mesure du rayon associée à l'orthèse B : $4{,}2^2 + 5{,}6^2 = r^2 \Rightarrow r = 7$

Il est donc possible de déduire les renseignements suivants concernant la parabole.

Comme l'équation associée à cette parabole est $(x - h)^2 = 4c(y - k)$, on a :

$$(7 - 3{,}5)^2 = 4c(0 - 2)$$
$$12{,}25 = -8c$$
$$c \approx -1{,}53$$

Les coordonnées du foyer sont (3,5, $\approx$ 0,47).



3. Il est possible de représenter cette situation dans un plan cartésien et de déduire les renseignements ci-dessous.

L'équation associée à cette hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, et on a :

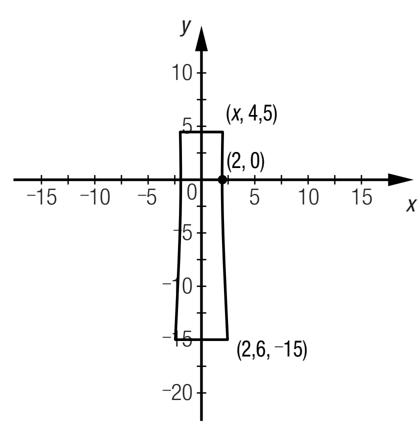
$$\frac{2{,}5^2}{2^2} - \frac{(-15)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(-15)^2}{b^2} = -0{,}5625$$
$$b^2 = 400$$

L'équation de l'hyperbole est donc $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{400} = 1$.

On cherche la valeur de x lorsque $y = 4{,}5$.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{4{,}5^2}{400} = 1$$
$$x^2 = 4{,}2025$$
$$x = \pm 2{,}05$$

La distance qui sépare les points A et B est de 4,1 cm. La prothèse est donc adéquate puisque la distance entre les points A et B est inférieure à 4,2 cm.



Vue d'ensemble

Page 324

1. a) 1) $s_y : (x, y) \mapsto (-x, y)$ **2)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O,\ 90°)} : (x, y) \mapsto (-y, x)$ **2)** $\begin{pmatrix} \cos 90° & \sin 90° \\ -\sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}$

c) 1) $t_{(-9,\ -9)} : (x, y) \mapsto (x - 9, y - 9)$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}$

d) 1) $s_x : (x, y) \mapsto (x, -y)$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O,\ 180°)} : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ **2)** $\begin{pmatrix} \cos 180° & \sin 180° \\ -\sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}$

f) 1) $h_{\left(O,\ -\frac{1}{3}\right)} : (x, y) \mapsto \left(-\frac{1}{3}x, -\frac{1}{3}y\right)$ **2)** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. a) 1) Une ellipse.
2) i) (0, 0) **ii)** (−13, 0), (0, 85), (13, 0) et (0, −85).
iii) (0, 84) et (0, −84). **iv)** Ne s'applique pas.

b) 1) Une parabole.
2) i) Ne s'applique pas. **ii)** (6, 3)
iii) (6, 0) **iv)** Ne s'applique pas.

c) 1) Une parabole.
2) i) Ne s'applique pas. **ii)** (0, −12)
iii) (1,5, −12) **iv)** Ne s'applique pas.

d) 1) Une hyperbole.
2) i) (0, 0) **ii)** (−10,5, 0) et (10,5, 0).
iii) (14,5, 0) et (−14,5, 0). **iv)** $y = \frac{20}{21}x$ et $y = -\frac{20}{21}x$.

e) 1) Une ellipse.
2) i) (−5, −9) **ii)** (−44, −9), (−5, 6), (34, −9) et (−5, −24).
iii) (−41, −9) et (31, −9). **iv)** Ne s'applique pas.

f) 1) Une hyperbole.
2) i) (15, −20) **ii)** (15, −29) et (15, −11).
iii) (15, −61) et (15, 21). **iv)** $y = \frac{9}{40}(x - 15) - 20$ et $y = -\frac{9}{40}(x - 15) - 20$.

3. a) $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$ **b)** $(x - 40)^2 + (y + 20)^2 = 3721$ **c)** $(x - 3)^2 = -20(y - 3)$

d) $\frac{(x-20)^2}{196} - \frac{(y-15)^2}{506,25} = 1$ **e)** $\frac{(x-30)^2}{400} + \frac{(y+15)^2}{1241} = 1$ **f)** $\frac{(x-25)^2}{784} - \frac{(y-15)^2}{2025} = -1$

g) $(x + 3)^2 = 0,5(y + 6)$

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 325

4. a) $(x - 14)^2 = 20(y + 18)$ **b)** $\frac{(x+12)^2}{841} + \frac{(y+8)^2}{441} = 1$ **c)** $\frac{(x+10)^2}{2809} + \frac{(y-30)^2}{2025} = 1$

d) $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 1225$ **e)** $\frac{(x-6)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{36} = 1$ **f)** $(y - 3)^2 = -2(x - 4)$

g) $\frac{(x-5)^2}{2304} - \frac{(y+12)^2}{196} = -1$ **h)** $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 169$

Vue d'ensemble (*suite*)

5. a) **1)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 16 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 16 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 6 & -13 & 12 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} -6 & 13 & -12 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 14 & 46 \\ 71 & 128 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 14 & 46 \\ 71 & 128 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} -101 & 72 \\ 23 & 64 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 19 & 62 & -88 \\ 20 & -32 & 40 \\ -63 & 26 & -24 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 128 & 58 & -135 \\ -20 & 8 & 48 \\ -56 & -66 & -5 \end{pmatrix}$ **10)** $\begin{pmatrix} 128 & 58 & -135 \\ -20 & 8 & 48 \\ -56 & -66 & -5 \end{pmatrix}$ **11)** $\begin{pmatrix} -8 & -6 & 14 \\ 4 & -12 & 4 \end{pmatrix}$ **12)** $\begin{pmatrix} -8 & -6 & 14 \\ 4 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

b) **1)** Oui. Voir les résultats en **a) 1)** et **2)**. **2)** Non. Voir les résultats en **a) 3)** et **4)**.
3) Non. Voir les résultats en **a) 7)** et **8)**. **4)** Oui. Voir les résultats en **a) 5)** et **6)**, et en **a) 9)** et **10)**.

6. a) **1)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O,\,-90°)} : (x, y) \mapsto (y, -x)$

2) $\begin{pmatrix} \cos -90° & \sin -90° \\ -\sin -90° & \cos -90° \end{pmatrix}$

b) **1)** $h_{(O,\,\frac{1}{2})} : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$

2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) **1)** $s_x : (x, y) \mapsto (x, -y)$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) **1)** $h_{(O,\,-3)} : (x, y) \mapsto (-3x, -3y)$

2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

e) **1)** $t_{(-3,\,-6)} : (x, y) \mapsto (x - 3, y - 6)$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

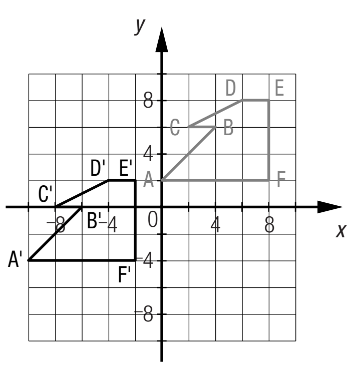
f) **1)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $r_{(O,\,90°)} : (x, y) \mapsto (-y, x)$

2) $\begin{pmatrix} \cos 90° & \sin 90° \\ -\sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}$

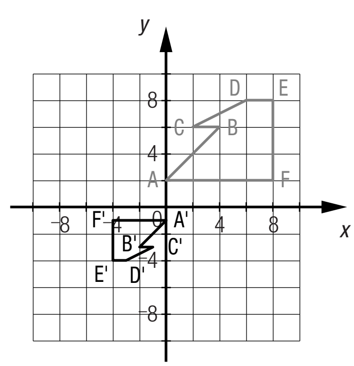
7. **a)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Une rotation centrée à l'origine de 180°.
b) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Une rotation centrée à l'origine de 360°.
c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Une rotation centrée à l'origine de -270°.

Vue d'ensemble (*suite*)

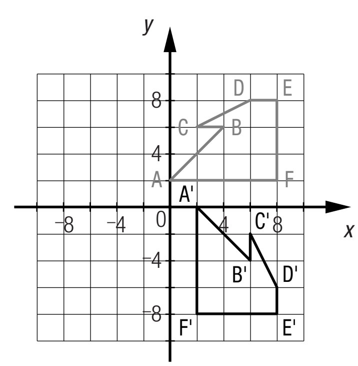
8. a)



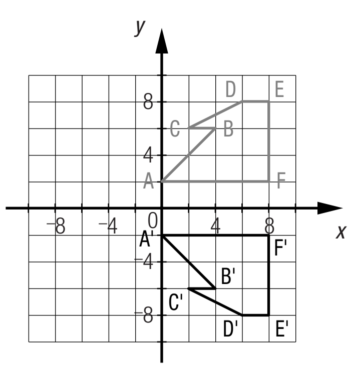
b)



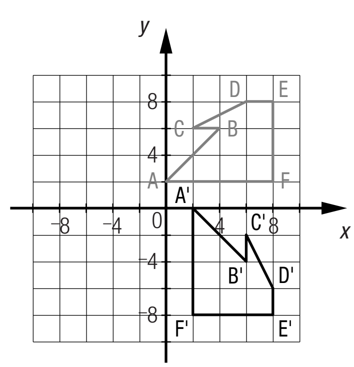
c)



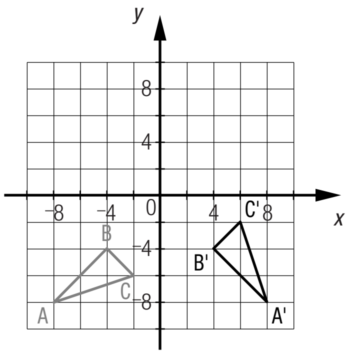
d)



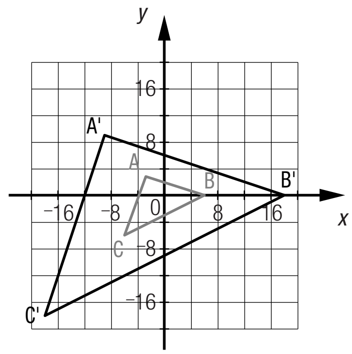
e)



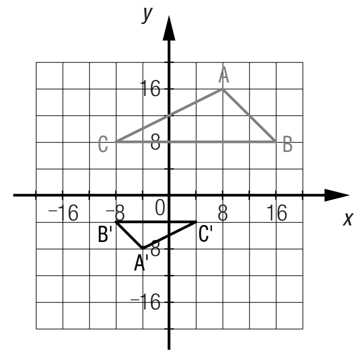
9. a)



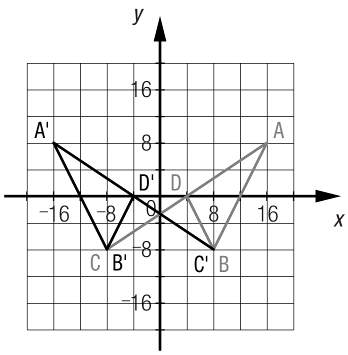
b)



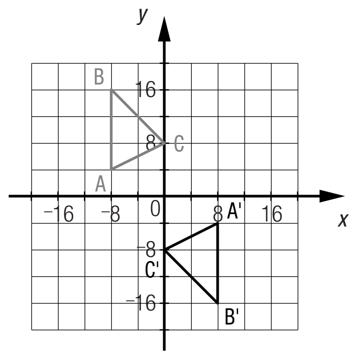
c)



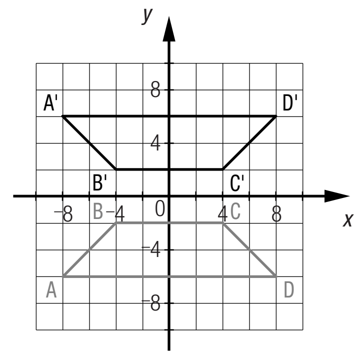
d)



e)



f)



Vue d'ensemble (*suite*)

Page 328

10. a) 1) Une ellipse. **2)** $\frac{(x-7)^2}{576} + \frac{(y-19)^2}{676} = 1$ **b) 1)** Une parabole. **2)** $(y+10)^2 = 24(x+2)$

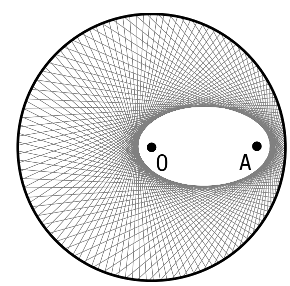
c) 1) Un cercle. **2)** $(x+15)^2 + (y-7)^2 = 324$ **d) 1)** Une hyperbole. **2)** $\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-15)^2}{225} = 1$

11.

Équation du lieu géométrique	Coordonnées du ou des sommets	Coordonnées du ou des foyers
$(x+15)^2 = 7(y-8)$	**(−15, 8)**	**(−15, 9,75)**
$\frac{(x-20)^2}{1089} - \frac{(y+10)^2}{3136} = -1$	**(20, 46)** **(20, −66)**	**(20, 55)** **(20, −75)**
$\frac{x^2}{1225} + \frac{(y+12)^2}{1369} = 1$	**(35, −12)** **(−35, −12)** **(0, 25)** **(0, −49)**	**(0, 0)** **(0, −24)**
$\frac{(x+30)^2}{900} - \frac{y^2}{30,25} = 1$	**(0, 0)** **(−60, 0)**	**(0,5, 0)** **(−60,5, 0)**
$y^2 = -0,2(x+0,1)$	**(−0,1, 0)**	**(−0,15, 0)**

12. a) Une ellipse. Le schéma ci-contre représente une infinité de pliures.

b) Le grand axe mesure 5 cm et le petit axe mesure 3 cm.
La distance entre les deux foyers est de 4 cm.



Vue d'ensemble (*suite*)

13. a) $\frac{(x+6)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ **b)** $(y+8)^2 = 8(x+3)$ **c)** $\frac{(x+12)^2}{144} - \frac{(y+16)^2}{256} = {}^-1$

d) $(x+18)^2 + (y-12)^2 = 64$ **e)** $\frac{(x+5)^2}{1225} - \frac{(y-5)^2}{144} = 1$ **f)** $(x+5)^2 = {}^-12(y-3)$

14. a) $B - C = \begin{pmatrix} 18 & 19 & 22 \\ 9 & 15 & 4 \\ 26 & 16 & 22 \end{pmatrix}$ **b)** $\frac{2}{3}A = \begin{pmatrix} 66 & 50 & 40 \\ 44 & 64 & 36 \\ 30 & 54 & 74 \end{pmatrix}$

15. À l'aide de la représentation graphique, il est possible de déduire que :

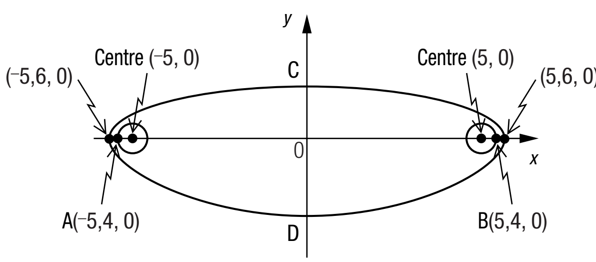
- $c = {}^-5$;
- l'ordonnée du sommet est 25 ;
- la courbe passe par le point (40, 20).

On obtient donc $(40 - h)^2 = 4 \times {}^-5 \times (20 - 25) \Rightarrow h = 30$.
L'équation associée au filet est donc $(x - 30)^2 = {}^-20(y - 25)$.

Vue d'ensemble (*suite*)

16. Il s'agit d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 4. La matrice de transformation est donc $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

17. Il est possible d'obtenir la représentation graphique ci-dessous.



a) 1) L'ellipse dont les coordonnées des foyers sont (⁻5,4, 0) et (5,4, 0) passe par le sommet dont les coordonnées sont (5,6, 0). La valeur du paramètre a est 5,6 et à l'aide de la relation $a^2 = b^2 + c^2$, il est possible de déduire que $b^2 = 2,2$. L'équation de l'ellipse qui passe par le point C est donc $\frac{x^2}{31,36} + \frac{y^2}{2,2} = 1$.

2) L'ellipse dont les coordonnées des foyers sont (⁻5, 0) et (5, 0) passe par le sommet dont les coordonnées sont (5,6, 0). La valeur du paramètre a est 5,6 et à l'aide de la relation $a^2 = b^2 + c^2$, il est possible de déduire que $b^2 = 6,36$. L'équation de l'ellipse qui passe par le point D est donc $\frac{x^2}{31,36} + \frac{y^2}{6,36} = 1$.

b) Il s'agit des sommets de chacune des deux ellipses déterminées en **a).** Les coordonnées du point C sont donc $(0, \approx 1,48)$ et celles du point D, $(0, \approx 2,52)$. La distance entre les points C et D est de $1,48 + 2,52 \approx 4$ m.

Vue d'ensemble (*suite*)

18. a) 1) Excentricité $= \frac{m\,\overline{FA}}{m\,\overline{AB}} = \frac{2,6}{3,25} = 0,8$.

2) Les coordonnées du sommet S de l'ellipse sont $(x, 0)$. Comme l'excentricité est de 0,8, on a :

$$\frac{{}^-4 - x}{x + 6,25} = 0,8$$
$${}^-4 - x = 0,8x + 5$$
$${}^-1,8x = 9$$
$$x = {}^-5$$

Les coordonnées du sommet S de l'ellipse sont (⁻5, 0).

b) La valeur du rapport est 0,8. Elle correspond à l'excentricité de cette ellipse.

c) Les coordonnées d'un des sommets sont (0, 25) et celles d'un des foyers sont (0, 7). Donc, l'excentricité de cette ellipse est : $\frac{\text{distance de l'origine au foyer}}{\text{distance de l'origine au sommet S}} = \frac{7}{25} = 0,28$

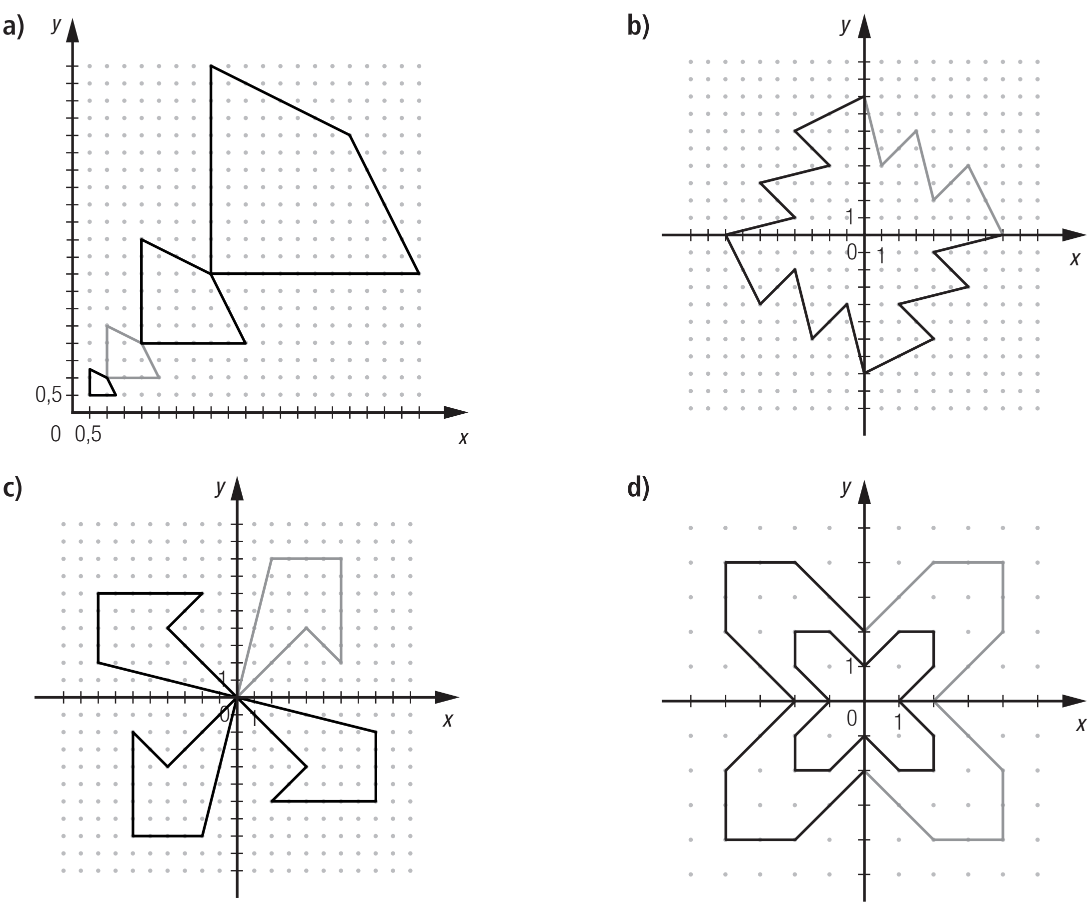
19. a) 1) D'après la symétrie de la parabole, on peut déduire que les coordonnées du sommet sont (4, −2).
L'équation de cette parabole est de la forme $(x - h)^2 = 4c(y - k)$. En substituant les données connues à certaines des variables, on détermine la valeur du paramètre c :
$(2 - 4)^2 = 4c(6 + 2)$
$c = 0{,}125$
L'équation de la parabole associée à la trajectoire de l'oiseau est $(x - 4)^2 = 0{,}5(y + 2)$.

2) La droite associée à la trajectoire du poisson passe par le foyer dont les coordonnées sont (4, −2 + 0,125), soit (4, −1,875).
On en déduit que son équation est $y = -0{,}4375x - 0{,}125$.

b) On doit résoudre le système d'équations suivant.
$(x - 4)^2 = 0{,}5(y + 2)$
$y = -0{,}4375x - 0{,}125$
De ce système, on obtient :
$(x - 4)^2 = 0{,}5(-0{,}4375x - 0{,}125 + 2)$
$x^2 - 7{,}78125x + 15{,}0625 = 0 \Rightarrow x_1 \approx 3{,}62$ et $x_2 \approx 4{,}16$.
Donc, $y_1 \approx -0{,}4375 \times 3{,}62 - 0{,}125 \approx -1{,}71$
et $y_2 \approx -0{,}4375 \times 4{,}16 - 0{,}125 \approx -1{,}95$.
Les coordonnées des points où l'oiseau pourrait capturer le poisson sont (≈ 3,62, ≈ −1,71) et (≈ 4,16, ≈ −1,95).

Vue d'ensemble (*suite*) **Page 332**

20.



21. Le schéma suivant représente la situation.

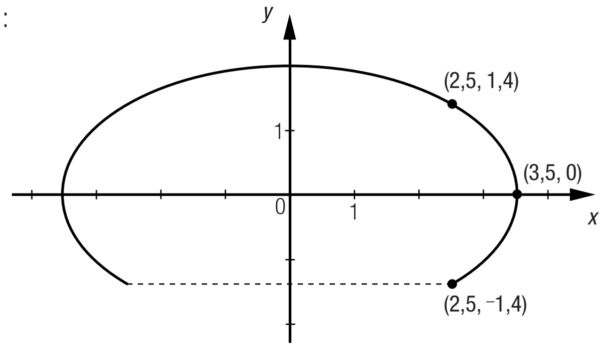
La courbe passe par les points (3,5, 0) et (2,5, 1,4), on a donc :

$$\frac{2{,}5^2}{3{,}5^2} + \frac{1{,}4^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{1{,}96}{b^2} = \frac{24}{49}$$

On en déduit que $b \approx 2$.

La hauteur maximale de ce passage est de $2 + 1{,}4 \approx 3{,}4$.



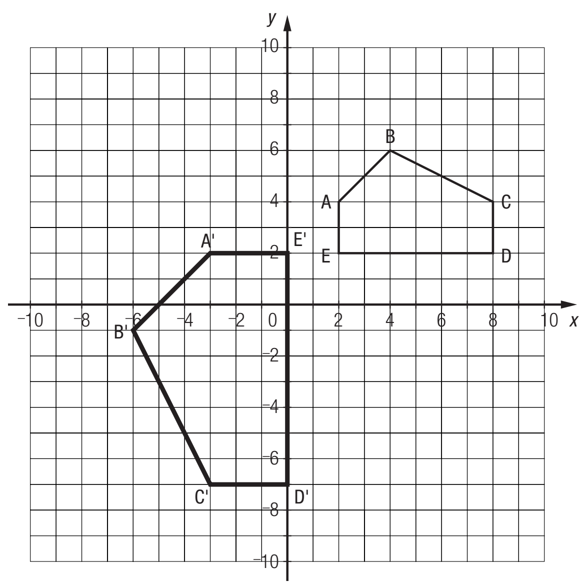
Vue d'ensemble (*suite*)

22. a) 1)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}5\cos 90° & -1{,}5\sin 90° \\ -1{,}5\sin 90° & 1{,}5\cos 90° \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & -1 \\ -3 & -7 \\ 0 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Aux coordonnées des sommets images de la figure ABCDE.

3)



b) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Une translation suivie d'une rotation suivie d'une réflexion suivie d'une homothétie.

c) Une composition de transformations peut être définie à l'aide d'une seule matrice de transformation.

23. a) L'équation associée à l'hyperbole est $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{625} = 1$, car l'équation d'une des asymptotes est $y = 5x$ et que les coordonnées d'un des sommets sont (5, 0).

b) Déterminer les valeurs de y lorsque x vaut 10,3 et 13,55.

$$\frac{10{,}3^2}{25} - \frac{y^2}{625} = 1$$

$$\frac{y^2}{625} = 3{,}24$$

$$y \approx 45{,}02$$

et

$$\frac{13{,}55^2}{25} - \frac{y^2}{625} = 1$$

$$\frac{y^2}{625} = 6{,}34$$

$$y \approx 62{,}97$$

La hauteur de la tour est de $45{,}02 + 62{,}97 \approx 107{,}99$ m.

Banque de problèmes

Page 334

1. L'équation d'une ellipse translatée est $\frac{(x - \mathrm{h})^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{(y - \mathrm{k})^2}{\mathrm{b}^2} = 1$.

Selon le raisonnement de l'élève aux cheveux blonds, on substitue k à la variable h et ⁻h à la variable k, ensuite on intervertit les paramètres a et b :

$\frac{(x - \mathrm{k})^2}{\mathrm{b}^2} + \frac{(y + \mathrm{h})^2}{\mathrm{a}^2} = 1$

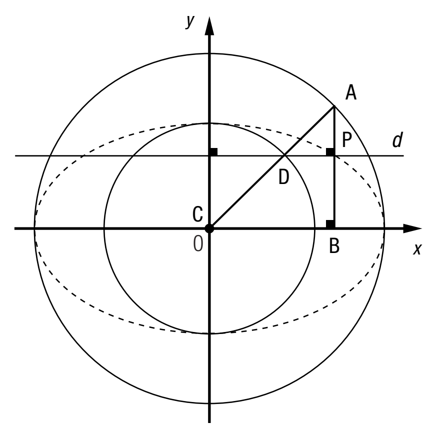
Les coordonnées du centre de l'ellipse initiale sont (h, k) et les coordonnées des sommets sont (⁻a + h, k), (h, ⁻b + k), (a + h, k) et (h, b + k).

Par une rotation de ⁻90°, les coordonnées du centre de l'ellipse image sont (k, ⁻h) et les coordonnées de ses sommets sont (k, a − h), (⁻b + k, ⁻h), (k, ⁻a − h) et (b + k, ⁻h), ce qui correspond à l'équation de l'ellipse image suggérée par l'élève aux cheveux blonds.

Cet élève a donc raison.

2. Le lieu géométrique est une ellipse comme celle illustrée ci-contre.

Le plus grand axe mesure 15 cm et le plus petit axe, 9 cm.

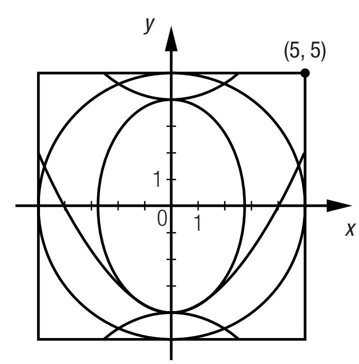


Banque de problèmes (*suite*)

Page 335

3. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

Voici la représentation graphique de cette situation.



Le diamètre du plus grand disque qu'il est possible de tailler est de 10 cm, donc son rayon mesure 5 cm. L'équation associée au pourtour de ce disque est donc $x^2 + y^2 = 25$.

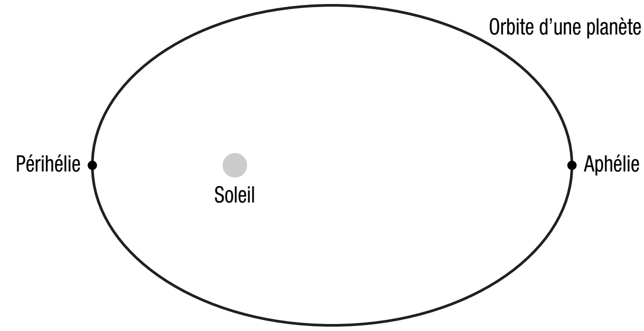
L'hyperbole passe par les points (0, 4) et (0, ⁻4), et les coordonnées des foyers sont (0, 5) et (0, ⁻5). Par la relation $\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2$, il est possible de déduire que $\mathrm{a}^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow \mathrm{a}^2 = 9$. L'équation associée à cette hyperbole est donc $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = {}^-1$.

La parabole passe par le point (0, ⁻4) et l'équation de sa directrice est $y = {}^-5$. On en déduit que h = 0, k = ⁻4 et c = 1. L'équation de la parabole est donc $x^2 = 4(y + 4)$. Les coordonnées du foyer de cette parabole sont (0, ⁻3).

L'ellipse passe par les points (0, 4) et (0, ⁻4), et les coordonnées de son foyer sont (0, ⁻3). Par la relation $\mathrm{b}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2$, il est possible de déduire que $4^2 = \mathrm{a}^2 + 3^2 \Rightarrow \mathrm{a}^2 = 7$. L'équation de l'ellipse est donc $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$.

4. L'aphélie et le périhélie sont illustrés ci-contre.

La longueur du plus grand axe correspond à la somme de l'aphélie et du périhélie. La distance du foyer au centre de l'ellipse correspond à la moitié du plus grand axe diminuée du périhélie. L'excentricité correspond à $\frac{\text{distance du foyer au centre de l'ellipse}}{\text{longueur du demi-grand axe}}$.



Le tableau ci-dessous présente les données nécessaires au calcul de l'excentricité de chaque planète.

Planète	Aphélie (millions de kilomètres)	Périhélie (millions de kilomètres)	Longueur du plus grand axe	Longueur du demi-grand axe	Distance du foyer au centre	Excentricité
Mercure	70	46	116	58	12	≈ 0,21
Vénus	109	107	216	108	1	≈ 0,009
Terre	152	147	299	149,5	2,5	≈ 0,017
Mars	249	207	456	228	21	≈ 0,092
Jupiter	817	741	1558	779	38	≈ 0,049
Saturne	1504	1349	2853	1426,5	77,5	≈ 0,054
Uranus	3004	2749	5753	2876,5	127,5	≈ 0,044
Neptune	4540	4460	9000	4500	40	≈ 0,009

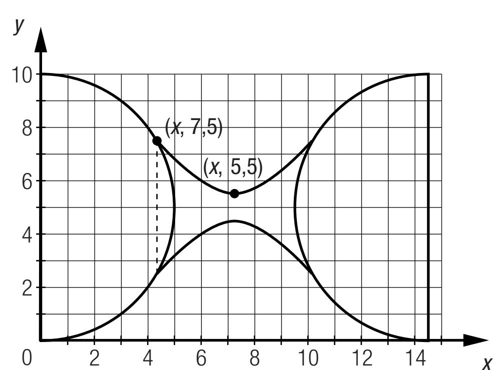
Le planétologue a tort, puisque c'est Mercure qui a la plus grande excentricité.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 336

5. Il est possible de représenter cette situation dans le plan cartésien suivant.

L'équation du cercle qui supporte le demi-cercle de gauche est $x^2 + (y - 5)^2 = 5^2$. On cherche la valeur de x lorsque $y = 7,5$.



$$x^2 + (7,5 - 5)^2 = 5^2$$
$$x^2 = 18,75$$
$$x = \pm\sqrt{18,75}.$$

Pour établir l'équation de l'hyperbole, il est possible de déduire que $b = 0,5$ et $a = 0,5$, car $\frac{b}{a} = 1$.

De plus, $k = 5$ et la courbe passe par le point $(\sqrt{18,75}, 7,5)$.

Il est possible d'établir l'équation de l'hyperbole en substituant les valeurs obtenues dans l'équation $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = -1$.

$$\frac{(\sqrt{18,75} - h)^2}{0,5^2} - \frac{(7,5 - 5)^2}{0,5^2} = -1$$
$$\frac{(\sqrt{18,75} - h)^2}{0,25} = 24$$
$$(\sqrt{18,75} - h)^2 = 6$$
$$\sqrt{18,75} - h = \pm\sqrt{6}$$

$h_1 = \sqrt{18,75} + \sqrt{6}$ et $h_2 = \sqrt{18,75} - \sqrt{6}$ (à rejeter, car cela correspond à l'abscisse d'un point à l'intérieur du premier disque).

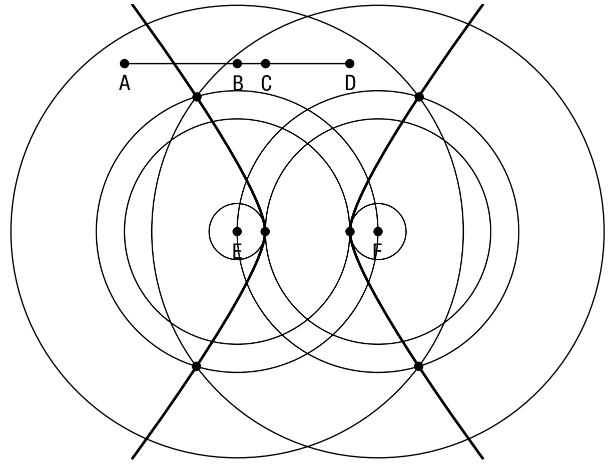
L'équation de l'hyperbole est donc $\frac{(x - (\sqrt{18,75} + \sqrt{6}))^2}{0,5^2} - \frac{(y - 5)^2}{0,5^2} = -1$.

D'après la symétrie de la situation, on déduit que la longueur du diabolo correspond au double de l'abscisse du centre de l'hyperbole. On a : $2 \times (\sqrt{18,75} + \sqrt{6}) \approx 13,38$ cm

Ce diabolo convient donc à un jongleur débutant puisque sa longueur totale se situe entre 12 et 14 cm.

6. Voici un dessin tracé à l'aide de la démarche indiquée :

Il est possible de tracer une hyperbole dont la distance entre les sommets est de 3 cm. La distance entre chaque foyer de l'hyperbole est de 5 cm.



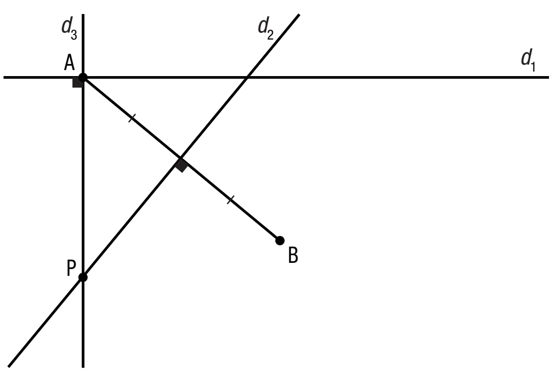
Banque de problèmes (*suite*)

Page 337

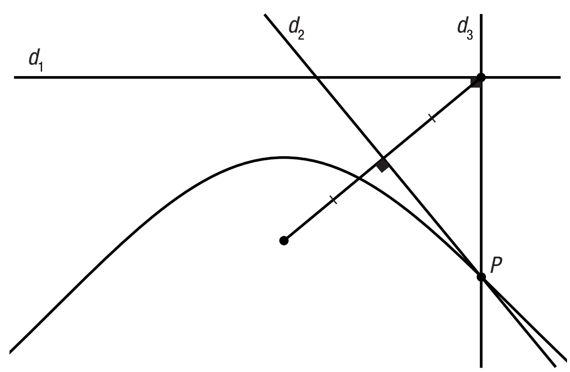
7. En procédant par élimination et par déduction, il est possible de déduire que la transformation géométrique est une homothétie centrée à l'origine de rapport ⁻0,5. Le tableau ci-contre fournit les coordonnées de chaque point initial et de chaque point image recherchés.

Point initial	Point image
A(4, 16)	A'(⁻2, ⁻8)
B(6, 0)	B'**(⁻3, 0)**
C(8, 6)	C'(⁻4, ⁻3)
D**(⁻12, 16)**	D'(6, ⁻8)
E**(⁻16, 12)**	E'(8, ⁻6)

8. Voici une représentation de la construction décrite :



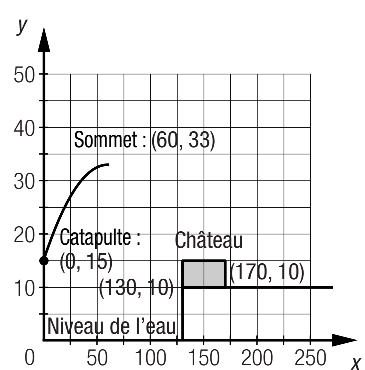
Le lieu géométrique est une parabole comme il est montré ci-dessous.



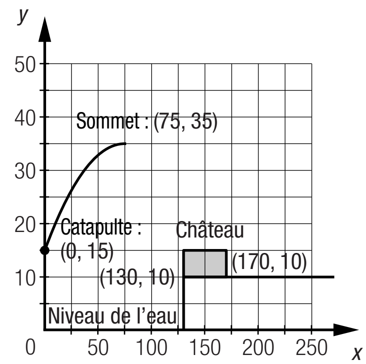
9. • Analyse de la trajectoire orange.
D'après la représentation graphique de la situation ci-contre, l'équation de la trajectoire est $(x - 60)^2 = ^-200(y - 33)$.
On détermine les coordonnées du projectile à $x = 130$ et à $x = 170$.

$$(130 - 60)^2 = ^-200(y - 33)$$
$$4900 = ^-200(y - 33)$$
$$y = 8{,}5 \text{ m}$$

Le projectile ne peut pas atteindre le château avec cette catapulte. Il percutera la falaise, au-dessous du mur du château.

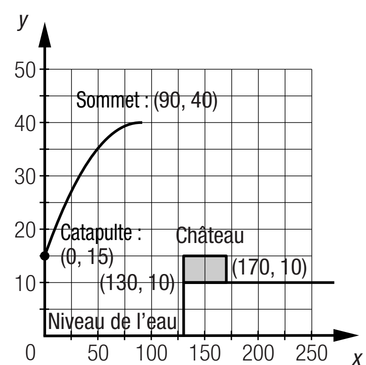


- Analyse de la trajectoire verte.
  D'après la représentation graphique de la situation ci-contre, l'équation de la trajectoire est $(x - 75)^2 = {}^-281,25(y - 35)$.
  On détermine les coordonnées du projectile à $x = 130$ et à $x = 170$.

  $$(130 - 75)^2 = {}^-281,25(y - 35)$$
  $$3025 = {}^-281,25(y - 35)$$
  $$y \approx 24,24 \text{ m}$$
  et
  $$(170 - 75)^2 = {}^-281,25(y - 35)$$
  $$9025 = {}^-281,25(y - 35)$$
  $$y \approx 2,91 \text{ m}$$
  Le projectile peut atteindre le château avec cette catapulte.

- Analyse de la trajectoire rose.
  D'après la représentation graphique de la situation ci-contre, l'équation de la trajectoire est $(x - 90)^2 = {}^-324(y - 40)$.
  On détermine les coordonnées du projectile à $x = 130$ et à $x = 170$.

  $$(130 - 90)^2 = {}^-324(y - 40)$$
  $$1600 = {}^-324(y - 40)$$
  $$y \approx 35,06 \text{ m}$$
  et
  $$(170 - 90)^2 = {}^-324(y - 40)$$
  $$6400 = {}^-324(y - 40)$$
  $$y \approx 20,25 \text{ m}$$
  Le projectile ne peut pas atteindre le château avec cette catapulte. Il tombera derrière le château sans le percuter.

  Seule la trajectoire verte permet au projectile d'atteindre le château.