AIDE-MÉMOIRE

OPTIMISATION

1. Résolution d'un problème d'optimisation

- On identifie les variables.
- On traduit les contraintes par un système d'inéquations.
- On trace le polygone de contraintes.
- On détermine les coordonnées des sommets du polygone de contraintes.
- On établit la règle de la fonction à optimiser.
- On déduit le sommet dont les coordonnées maximisent ou minimisent la fonction à optimiser.

2. Exemple d'un problème d'optimisation

Des étudiants décident de vendre des casquettes et des écussons pour amasser des fonds.

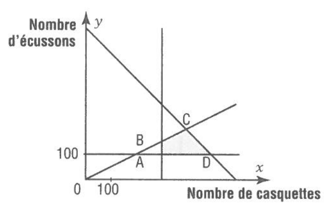
Ils commandent 600 articles, prévoient vendre au moins 300 casquettes, au moins 100 écussons et au moins deux fois plus de casquettes que d'écussons.

Le profit net par casquette est de 2 $ et celui par écusson est de 1,50 $.

- x : nombre de casquettes vendues, y : nombre d'écussons vendus
- Système de contraintes

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 600 \\ x \geq 300 \\ y \geq 100 \\ x \geq 2y \end{cases}$$

- Polygone de contraintes

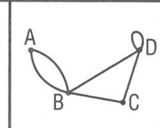
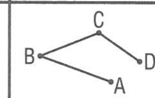
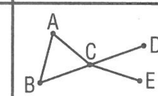
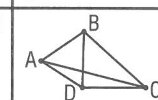
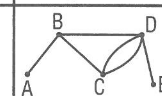
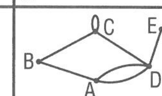
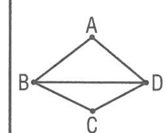
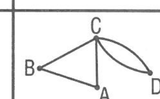
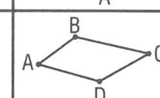
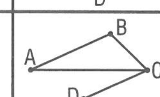
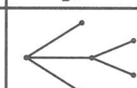
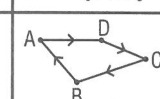
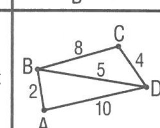


- Règle de la fonction à optimiser : $R = 2x + 1,50y$

Sommets	$R = 2x + 1,50y$
A(300, 100)	750
B(300, 150)	825
C(400, 200)	1100
D(500, 100)	1150

Le profit minimal envisagé est de 750 $ et le profit maximal est de 1150 $.

GRAPHES

	Définition	Exemple
Graphe	• Comprend des sommets et des arêtes qui établissent les liens entre les sommets. • Le degré d'un sommet est égal au nombre de fois qu'il est touché par une arête. **Ex. :** deg C = 2	
Graphe simple	Pas de boucle et chaque paire de sommets reliée par au plus une arête.	
Graphe connexe	Entre deux sommets quelconques, il existe une arête ou une suite d'arêtes qui joint ces deux sommets.	
Graphe complet	Entre deux sommets quelconques, il existe une arête qui joint ces deux sommets.	
Chaîne	Succession d'arêtes. **Ex. :** Chaîne ABCDCB	
Chaîne simple	N'admet pas de répétition d'arêtes. **Ex. :** Chaîne ABCDE.	
Chaîne eulérienne	Chaîne qui passe par toutes les arêtes une et une seule fois. Le graphe possède exactement deux sommets de degré impair qui sont le sommet de départ et d'arrivée de la chaîne. **Ex. :** BADCBD est une chaîne eulérienne.	
Cycle	Chaîne qui commence et finit par le même sommet. **Ex. :** Cycle BCAB	
Cycle eulérien	Cycle qui passe par toutes les arêtes une et une seule fois. **Ex. :** ABCDA	
Cycle hamiltonien	Cycle qui passe par tous les sommets une et une seule fois. **Ex. :** Cycle ABCD	
Arbre	Graphe connexe qui ne possède pas de cycle simple. L'arbre a n sommets et $(n - 1)$ arêtes.	
Graphe orienté	Graphe dans lequel chaque arête est orientée. Chaîne orientée (chemin) – Cycle orienté (circuit)	
Graphe valué	Graphe où on observe des valeurs numériques sur les arêtes. Valeur d'une chaîne : somme des valeurs qui constituent la chaîne. **Ex. :** La valeur de la chaîne ABCD est 14.	
Arbre optimal	Dans un graphe valué connexe, on peut trouver un arbre de valeur minimale ou maximale.	
Chemin critique	Chaîne orientée du graphe qui a une valeur maximale. Cette valeur représente le temps minimal pour réaliser toutes les étapes.	
Coloriage d'un graphe	Deux sommets adjacents sont toujours de couleurs différentes. Un nombre minimal de couleurs différentes doit être utilisé pour colorer les sommets du graphe.	

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

- **Croissance exponentielle** $\boxed{y = ac^{bx}}$ $(c > 0, c \neq 1)$

  a représente la valeur initiale.
  c représente le facteur multiplicatif
  b représente le nombre de périodes par unité de temps

  Ex. : Une culture contient 1500 bactéries.

  1. Elle croît de 4 % chaque 2 heures.

  $y = 1500(1{,}04)^{\frac{1}{2}t}$

  2. Elle décroît de 10 % chaque 20 minutes.

  $y = 1500(0{,}9)^{3t}$

- **Définition d'un logarithme** $\boxed{\log_c p = q \Leftrightarrow c^q = p}$ $(c > 0, p > 0)$

  Ex. : $\log_2 8 = 3$ car $2^3 = 8$

- **Loi de changement de base** $\boxed{\log_c x = \dfrac{\log_m x}{\log_m c}}$

  Ex. : $\log_2 7 = \dfrac{\log 7}{\log 2}$

- **Intérêt simple** $\boxed{C(t) = C_0(1 + it)}$

  Ex. : On investit un montant de 3000 $ à un taux d'intérêt simple de 2,8 %.

  Après 7 ans, $C(t) = 3000(1 + 0{,}028(7))$
  $= 3588$ $

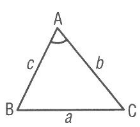
- **Intérêt composé annuellement** $\boxed{C(t) = C_0(1 + i)^t}$

  Ex. : On investit un montant de 3000 $ à un taux d'intérêt de 2,8 % composé annuellement.

  Après 7 ans, $C(t) = 3000(1{,}028)^7$
  $= 3639{,}76$ $

FIGURES ÉQUIVALENTES

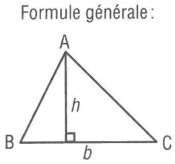
- **Loi des cosinus**



$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$

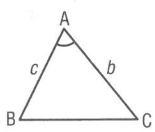
- **Aire d'un triangle**

Formule générale :



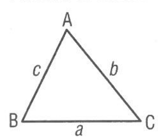
$\boxed{A = \dfrac{b \times h}{2}}$

Formule trigonométrique :



$\boxed{A = \dfrac{bc \sin A}{2}}$

Formule de Héron :



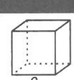
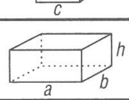
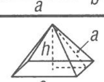
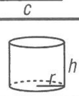
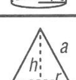
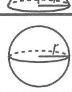
$\boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

où $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

- **Figures équivalentes**
  Deux figures planes sont équivalentes si elles ont la même aire.

- **Solides équivalents**
  Deux solides sont équivalents s'ils ont le même volume.

- **Aire et volume de solides**

Solide	Figure	Aire totale	Volume
Cube		$A_t = 6c^2$	$V = c^3$
Prisme		$A_t = 2A_b + P_b \times h$	$V = A_b \times h$
Pyramide		$A_t = A_b + \dfrac{P_b \times a}{2}$	$V = \dfrac{A_b \times h}{3}$
Cylindre		$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh$	$V = \pi r^2 h$
Cône		$A_t = \pi r^2 + \pi ra$	$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$
Sphère		$A_t = 4\pi r^2$	$V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

PROBABILITÉS

1. **Expérience aléatoire** : on ne peut pas prévoir le résultat.

2. L'ensemble des **résultats possibles** est noté Ω.
Ex. : On lance une fois un dé. On a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. **Événement** : A : «observer un résultat pair». $A = \{2, 4, 6\}$.

4. Événements **incompatibles** : ils ne peuvent se réaliser simultanément.
Ex. : A « observer un résultat inférieur à 3 » et B « observer un résultat supérieur à 4 ».
$A = \{1, 2\}$ et $B = \{5, 6\}$ sont incompatibles. On a : $A \cap B = \varnothing$.

5. Événements A et B **complémentaires** ou **contraires** : ils sont incompatibles et il est certain que A ou B se réalise. $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$.

6. **Probabilité d'un événement A.** $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ (Résultats équiprobables)

Ex. : A : « obtenir un résultat pair ». $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$

7. **Probabilité de l'événement contraire** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

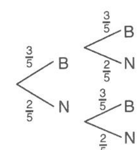
8. **Probabilité de la réunion** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

9. **Probabilité conditionnelle** $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

10. **Probabilité de l'intersection** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$

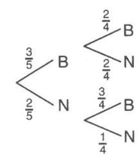
11. **Expérience aléatoire à plusieurs étapes**
On tire 2 fois d'une urne qui renferme 3 boules blanches et 2 boules noires.

Avec remise



$P(B, B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
$P(B, N) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
$P(N, B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
$P(N, N) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

Sans remise



$P(B, B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
$P(B, N) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
$P(N, B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
$P(N, N) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

12. **Variables aléatoires**
Ex. : On lance 2 fois une pièce de monnaie. $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$
X : « nombre total de piles observés ».

- Distribution de probabilités de X.

X	0	1	2	Total
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

- **L'espérance mathématique** $E(X) = 0 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) = 1.$

  On observe en moyenne au total 1 pile en 2 lancers.

- **Contexte d'un jeu**
  Si X désigne le gain lors d'un jeu, E(X) est le gain espéré.

  Ex. : On propose le jeu suivant : « Lancer une pièce de monnaie deux fois et perdre 1 $ si on obtient aucun pile, recevoir 0 $ si on obtient exactement un pile ou recevoir 2 $ si on obtient exactement deux piles. » X désigne le gain du joueur.

  – La distribution de probabilités du gain X est :

X	−1	0	2
$P(x)$	0,25	0,50	0,25

  – On a : $E(X) = -1 \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}50 + 2 \times 0{,}25 = 0{,}25$ $

  Dans un contexte de jeu, si la variable aléatoire X décrit le gain, l'espérance de X est appelée **gain espéré**.

  Si $E(X) < 0$: le jeu est **défavorable** au joueur.
  Si $E(X) = 0$: le jeu est **équitable**.
  Si $E(X) > 0$: le jeu est **favorable** au joueur.

  Ainsi, dans cette situation, le jeu est favorable au joueur, car le gain espéré est positif ($E(X) = 0{,}25$ $). En moyenne, le joueur gagne 0,25 $ par jeu.