Willi am

C. AIDE-MÉMOIRE

OPTIMISATION

1. Résolution d'un problème d'optimisation

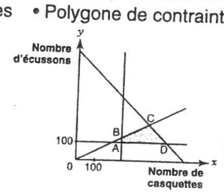
- On identifie les variables.
- On traduit les contraintes par un système d'inéquations.
- On trace le polygone de contraintes.
  On détermine les coordonnées des sommets du polygone de contraintes.
- On établit la règle de la fonction à optimiser.
- On déduit le sommet dont les coordonnées maximisent ou minimisent la fonction à optimiser.

2. Exemple d'un problème d'optimisation

Des étudiants décident de vendre des casquettes et des écussons pour amasser des fonds.
Ils commandent 600 articles, prévoient vendre au moins 300 casquettes, au moins 100 écussons et au moins deux fois plus de casquettes que d'écussons.
Le profit net par casquette est de 2 \$ et celui par écusson est de 1,50 \$.

- x: nombre de casquettes vendues, y: nombre d'écussons vendus
- Système de contraintes
- Polygone de contraintes

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 600$
$x \geq 300$
$y \geq 100$
$x \geq 2y$



Sommets	R = 2x + 1,50 y
A(300, 100)	750
B(300, 150)	825
C(400, 200)	1100
D(500, 100)	1150

Le profit minimal envisagé est de 750 \$ et le profit maximal est de 1150 \$.

- Règle de la fonction à optimiser: $R = 2x + 1{,}50y$

FONCTIONS RÉELLES

1. Réciproque d'une fonction

Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = 2x + 6$
$y = 2x + 6$
$y - 6 = 2x$
$x = \frac{1}{2}y - 3$
$y = \frac{1}{2}x - 3$ (On interchange les lettres x et y.)

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \frac{1}{2}x - 3$
(On isole x.)

2. Composition de fonctions

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = 2x + 1$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2 + 4$

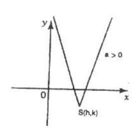
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 4) = 2(x^2 + 4) + 1 = 2x^2 + 9$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 4 = 4x^2 + 4x + 5$

3. Fonction valeur absolue

$\boxed{f(x) = a|b(x - h)| + k}$

- $a > 0$, $\vee$ $\quad a < 0$, $\wedge$ $\quad$ Sommet: $S(h, k)$
- dom $f = \mathbb{R}$ • ima $f = [k, +\infty[$ si $a > 0$ • Si $a > 0$, min $f = k$
  $=]-\infty, k]$ si $a > 0$ $\quad$ Si $a < 0$, max $f = k$



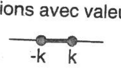
- Équations avec valeur absolue

$\boxed{|x| = k}$

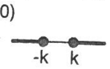
Si $k > 0$, $x = -k$ ou $x = k$, si $k = 0$, $x = 0$, si $k < 0$, aucune solution

- Inéquations avec valeur absolue ($k > 0$)

$|x| \leq k$



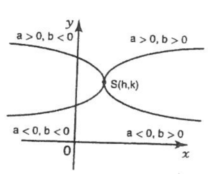
$|x| \geq k$



4. Fonction racine carrée

$\boxed{f(x) = a\sqrt{b(x - h)} + k}$

- dom $f = [h, +\infty[$ si $b > 0$ • ima $f = [k, +\infty[$ si $a > 0$
  $=]-\infty, h]$ si $b < 0$ $\quad =]-\infty, k]$ si $a < 0$
- Sommet: $S(h, k)$
- Variation: $ab > 0$, $f \nearrow$ dans le domaine
  $ab < 0$, $f \searrow$ dans le domaine
- Si $a > 0$, min $f = k$, si $a < 0$, max $f = k$
- Règle d'une fonction racine carrée
  Si $b > 0$, on utilise $f(x) = a\sqrt{x - h} + k$, si $b < 0$, on utilise $f(x) = a\sqrt{-(x - h)} + k$
- La réciproque d'une fonction carrée est représentée par une branche de parabole.
  Ex.: $f(x) = 2\sqrt{x + 3} - 1$ $\quad f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 3 \quad x \geq -1$

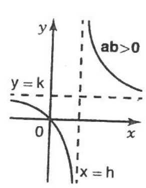


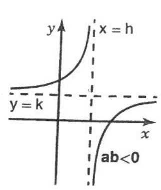
5. Fonction rationnelle

Forme canonique: $\boxed{y = \dfrac{a}{b(x - h)} + k}$

- dom $= \mathbb{R}\backslash\{h\}$ $\quad$ ima $f = \mathbb{R}\backslash\{k\}$
- Asymptotes: $x = h$ et $y = k$
- Variation: $ab > 0$, $f \searrow$ dans le domaine
  $ab < 0$, $f \nearrow$ dans le domaine

Forme générale: $\boxed{y = \dfrac{ax + b}{cx + d}}$





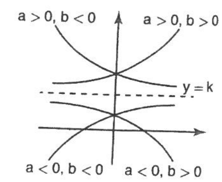
- dom $= \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, ima $f = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{a}{c}\right\}$ • Asymptotes: $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$
- La réciproque d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle.

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE

1. Fonction exponentielle

$\boxed{f(x) = a(c)^{b(x-h)} + k}$

- dom $f = \mathbb{R}$
- ima $f =]k, +\infty[$ si $a > 0$
  $=]-\infty, k[$ si $a < 0$
- Asymptote: $y = k$
- Variation: $ab > 0$, $f \nearrow$ dans $\mathbb{R}$
  $ab < 0$, $f \searrow$ dans $\mathbb{R}$



2. Rôle des paramètres a et b

$\boxed{y = a(c)^{bx}}$

- c représente le facteur multiplicatif.
- a représente la valeur initiale.
- b représente le nombre de périodes par unité de temps.
  Ex.: Une culture bactérienne renferme 120 bactéries au départ. Elle augmente de 5 % chaque 2 heures.
  t: nombre d'heures depuis le départ, y: nombre de bactéries dans la culture
  $y = 120(1{,}05)^{\frac{1}{2}t}$

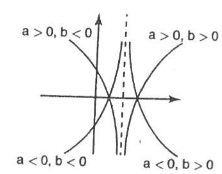
3. Équation exponentielle $\boxed{c^u = c^v \Leftrightarrow u = v}$

4. Définition du logarithme $\boxed{\log_c p = q \Leftrightarrow c^q = p}$ $\quad$ ($c > 0$, $c \neq 1$, $p > 0$)

5. Fonction logarithmique

$\boxed{f(x) = a\log_c b(x - h) + k}$

- dom $f =]h, +\infty[$ si $b > 0$
  $=]-\infty, h[$ si $b < 0$
- ima $f = \mathbb{R}$
- Asymptote: $x = h$
- Variation: $ab > 0$, $f \nearrow$ dans $\mathbb{R}$
  $ab < 0$, $f \searrow$ dans $\mathbb{R}$



La réciproque d'une fonction exponentielle est une fonction logarithmique et vice-versa.
Ex.: $f(x) = 2(3)^{\frac{1}{4}(x-1)} + 5 \quad f^{-1}(x) = 4\log_3 \frac{1}{2}(x - 5) + 1$

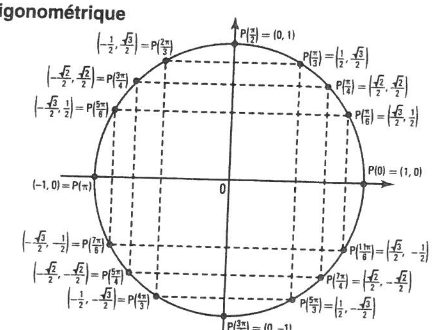
6. Calculs logarithmiques

- $\boxed{\log_c 1 = 0}$ $\quad \boxed{\log_c c = 1}$ $\quad \boxed{\log_c c^n = n}$ $\quad \boxed{c^{\log_c M} = M}$
- $\boxed{\log_c ab = \log_c a + \log_c b}$ $\quad \boxed{\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b}$ $\quad \boxed{\log_c a^n = n\log_c a}$
- Loi de changement de base $\boxed{\log_c x = \dfrac{\log_m x}{\log_m c}}$

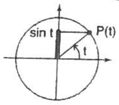
7. Équation logarithmique $\boxed{\log_c u = \log_c v \Leftrightarrow u = v}$

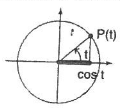
TRIGONOMÉTRIE

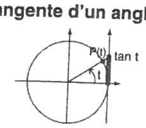
1. Cercle trigonométrique



2. Sinus d'un angle $\quad$ Cosinus d'un angle $\quad$ Tangente d'un angle



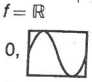




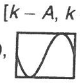
3. Fonction sinus

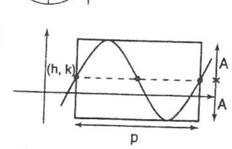
$\boxed{f(x) = a\sin b(x - h) + k}$

- Point de départ d'un cycle: (h, k)
- Amplitude: $A = |a|$
- Période: $p = \dfrac{2\pi}{|b|}$
- dom $f = \mathbb{R}$ • ima $f = [k - A, k + A]$
- $ab > 0$,



$ab < 0$,

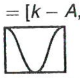


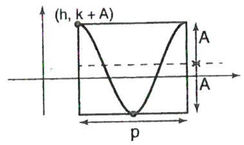


- Équation: $\sin\theta = k$
  Dans $[0, 2\pi]$, $\theta_1 = \sin^{-1} k$ et $\theta_2 = \pi - \theta_1$; Dans $\mathbb{R}$, $S = \{\theta_1 + 2\pi n, \theta_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

4. Fonction cosinus

$\boxed{f(x) = a\cos b(x-h) + k}$

- Point de départ d'un cycle : $(h, k + a)$
- Amplitude : $A = |a|$
- Période : $p = \dfrac{2\pi}{|b|}$
- dom $f = \mathbb{R}$
- ima $f = [k - A, k + A]$
- $a > 0$,  $a < 0$, 
- Équation : $\cos\theta = k$

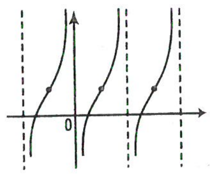


Dans $[0,2\pi]$, $\theta_1 = \cos^{-1} k$ et $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$; Dans $\mathbb{R}$, $S = \{\theta_1 + 2\pi n, \theta_2 + 2\pi n, n\in\mathbb{Z}\}$

5. Fonction tangente

$\boxed{f(x) = a\tan b(x-h) + k}$

- Point d'inflexion : (h, k)
- Période : $p = \dfrac{\pi}{|b|}$
- Équation d'une asymptote : $x = \dfrac{\pi}{2b} + h$
- Variation : $ab > 0$, $f \nearrow$ dans le domaine
  $ab < 0$, $f \searrow$ dans le domaine
- Équation : $\tan\theta = k$



Dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\theta_1 = \tan^{-1} k$; Dans $\mathbb{R}$, $S = \{\theta_1 + \pi n, n\in\mathbb{Z}\}$

6. Identités trigonométriques

- Rapports trigonométriques
  $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, $\quad \text{cotan } t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$, $\quad \text{cosec } t = \dfrac{1}{\sin t}$, $\quad \sec t = \dfrac{1}{\cos t}$
- Identités trigonométriques
  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $\quad 1 + \text{cotan}^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

7. Formules trigonométriques

- Formules trigonométriques
  $\sin(-t) = -\sin t$ $\quad \cos(-t) = \cos t$ $\quad \tan(-t) = \tan t$
- Formules de l'addition
  $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$, $\sin(a - b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$
  $\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, $\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
  $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$, $\quad \tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$
- Formules du double
  $\sin a = 2\sin a\cos a$, $\quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$, $\quad \tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

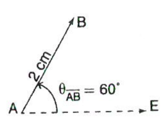
VECTEURS

1. Description

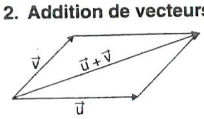
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, d'origine A et d'extrémité B, de module 2 cm, a une orientation de 60°.

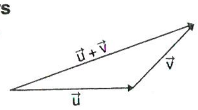
Le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

L'orientation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\theta_{\overrightarrow{AB}}$.



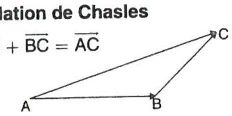
2. Addition de vecteurs





3. Relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

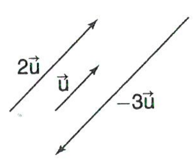


4. Soustraction de vecteurs

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ $\qquad$ Ex. : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

5. Multiplication par un réel

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction
- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens si $k > 0$
- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraires si $k < 0$
- $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$



6. Composantes d'un vecteur algébrique

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

7. Norme d'un vecteur

Si $\vec{u} = (a, b)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

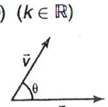
8. Opérations entre vecteurs algébriques

Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ alors

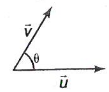
- $\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d)$ $\quad$ • $\vec{u} - \vec{v} = (a - c, b - d)$ $\quad$ • $k\vec{u} = (ka, kb)$ $(k \in \mathbb{R})$

9. Produit scalaire

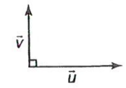
- $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta}$
- Si $\vec{u} = (a_1, b_1)$ et $\vec{v} = (a_2, b_2)$ alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2}$



10. Angle entre deux vecteurs



$\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

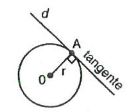


$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

CONIQUES

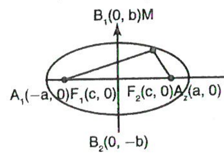
1. Cercle

- Équation du cercle centré à l'origine. $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$
- Droite tangente à un cercle : $d \perp \overline{0A}$ $\qquad d(0, d) = r$

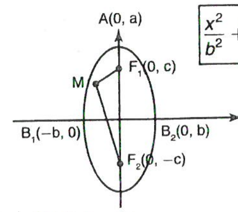


2. Ellipse

- Équation d'une ellipse centrée à l'origine



$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

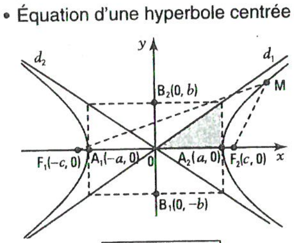


$\boxed{\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1}$

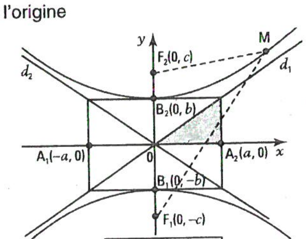
- Pour tout point M de l'ellipse, on a : $d(M,F_1) + d(M, F_2) = 2a$
- Les paramètres de l'ellipse vérifient la relation de Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$.

3. Hyperbole

- Équation d'une hyperbole centrée à l'origine



$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

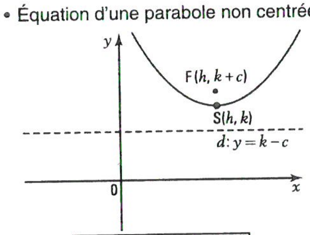


$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1}$

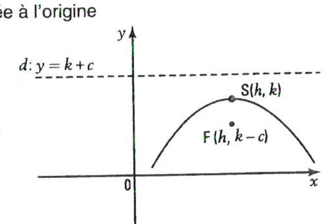
- Pour tout point M de l'hyperbole, on a : $|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = 2a$
- Les paramètres de l'hyperbole vérifient la relation de Pythagore : $c^2 = a^2$ ...

4. Parabole

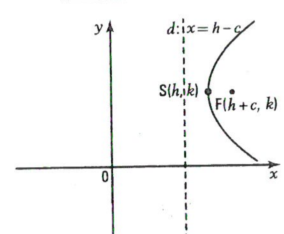
- Équation d'une parabole non centrée à l'origine



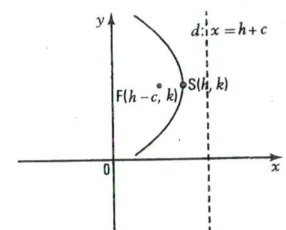
$\boxed{(x - h)^2 = 4c(y - k)}$



$\boxed{(x - h)^2 = -4c(y - k)}$



$\boxed{(y - k)^2 = 4c(x - h)}$



$\boxed{(y - k)^2 = -4c(x - h)}$

- Pour tout point M de la parabole, on a : $d(M, F) = d(M, d)$.