VISION 3 Les fonctions exponentielles et logarithmiques

RÉVISION 3

Réactivation 1

Page 158

a. 5088 ppm

b. **1)** $5088 \times 0{,}5^5 = 159$ ppm **2)** $5088 \times 0{,}5^{10} \approx 4{,}97$ ppm **3)** $5088 \times 0{,}5^{24} \approx 3{,}03 \times 10^{-4}$ ppm

c. 6 h

d. **1)** 7 h après avoir été administré. **2)** 39,75 ppm

Réactivation 2

Page 159

a. Le nombre de cellules double chaque jour.

b. $15\,600 \div 2 = 7800$ cellules.

c. **1)** 62 400 cellules. **2)** $7800 \times 2^{10} = 7\,987\,200$ cellules. **3)** $7800 \times 2^{20} = 8\,178\,892\,800$ cellules.

d. 8 jours après le démarrage du bioréacteur.

e. **1)** **Évolution du nombre de cellules dans un bioréacteur depuis son démarrage**

Temps (jours)	0	1	2	3	4
Nombre de cellules par millilitre de culture	7800	**23 400**	**70 200**	**210 600**	**631 800**

2) 6 jours après le démarrage du bioréacteur.

Mise à jour

Page 161

1. **a)** -2^6 **b)** $2^3 \times 3^3$ **c)** -2^{11} **d)** $2^{10} \times 3^2 \times 5$ **e)** $-2^4 \times 3^2 \times 5$ **f)** $-2^4 \times 3^4$

2. **a)** 27 **b)** 32 **c)** 225 **d)** 1,44
e) 0,027 **f)** 0 **g)** 1 **h)** 1

3. **a)** 2^9 **b)** 9^8 ou 3^{16}. **c)** 3^4 **d)** 4^2 ou 2^4.
e) 4^{-24}, 2^{-48}, $\left(\frac{1}{4}\right)^{24}$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)^{48}$. **f)** 3^{-21} ou $\left(\frac{1}{3}\right)^{21}$. **g)** 6^0 ou 1. **h)** 12^{-8} ou $\left(\frac{1}{12}\right)^8$.

4. **a)** a^7 **b)** a^7 **c)** 2^{3a} **d)** a^{-2} ou $\left(\frac{1}{a}\right)^2$, si $a \neq 0$. **e)** 3^{a+4}
f) a^{2b+1}, si $a \neq 0$. **g)** a^3 **h)** a^0 ou 1, si $a \neq 0$.

5. 1 et B, 2 et D, 3 et A, 4 et E, 5 et C.

6. **a)** $x = 3$ **b)** $x = \pm 6$ **c)** $x = 32$ **d)** $x = 4$ **e)** $x = 4$ **f)** $x = 2401$

Mise à jour (*suite*)

Page 162

7. **a)** $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{5^2}$ ou $\sqrt[3]{25}$. **c)** $\sqrt[5]{2^4}$ ou $\sqrt[5]{16}$.
d) $\sqrt{7^5}$ ou $\sqrt{16\,807}$. **e)** $\sqrt{3^3}$ ou $\sqrt{27}$. **f)** $\sqrt{6}$

8. **a)** $3^{\frac{1}{2}}$ **b)** $9^{\frac{1}{3}}$ ou $3^{\frac{2}{3}}$. **c)** $5^{\frac{2}{5}}$ ou $25^{\frac{1}{5}}$. **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ou $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$. **e)** $5^{-\frac{1}{6}}$ **f)** $8^{\frac{1}{4}}$ ou $2^{\frac{3}{4}}$.

9. a) a **b)** b^6, si $b \neq 0$. **c)** $2^3c^{\frac{2}{3}}$ **d)** 1 **e)** $\frac{\sqrt{3}}{6e}$

10. a) $x = 5$ **b)** $x = {}^-4$ **c)** $x = 6$ **d)** $x = \frac{1}{4}$ **e)** $x = {}^-9$ **f)** $x = {}^-\frac{1}{4}$

11. L'énoncé **B** est vrai si $a \neq 0$; l'énoncé **C** est vrai ; l'énoncé **F** est vrai si $a \neq 0$.

12. a) 1) 16 bactéries. **2)** 1024 bactéries.

b) 1) 3 h plus tard.

2) Si le nombre de bactéries quadruple toutes les heures, alors il double toutes les 30 min. Puisque $2^{11} = 2048$, on a $11 \times 30 = 330$ min, soit 5 h 30 min plus tard.

Mise à jour (*suite*) **Page 163**

13. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^8$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **c)** 3^3 **d)** 5^3 **e)** ${}^-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$ **f)** 5^3

14. a) $a = 4$ **b)** $a = 2$ **c)** $a = {}^\pm 3$ **d)** $a = 2$ **e)** $a = 2$ **f)** $a = {}^\pm 2$

15. Non. La pyramide de gauche a une aire de $x^2 + 4 \times \frac{x \times 2x}{2} = 5x^2$, tandis que celle de droite a une aire de $(2x)^2 + 4 \times \frac{2x \times x}{2} = 8x^2$.

16. a)

Pourcentage de lumière selon la profondeur d'un lac

Profondeur (cm)	Pourcentage de lumière
0	100
50	98,5
100	97,0225
150	**≈ 95,57**
200	**≈ 94,13**

b) Le pourcentage de lumière est de $0{,}985^{100} \approx 22{,}06\,\%$.

c) 1) La visibilité n'est pas nulle (le pourcentage de lumière est de $0{,}985^{180} \approx 6{,}58\,\%$).

2) La visibilité est presque nulle (le pourcentage de lumière est de $0{,}985^{190} \approx 5{,}66\,\%$).

3) La visibilité est nulle (le pourcentage de lumière est de $0{,}985^{200} \approx 4{,}87\,\%$).

Mise à jour (*suite*) **Page 164**

17. a) Aucun nombre multiplié par lui-même ne peut avoir pour produit un nombre inférieur à 0.

b) Un nombre inférieur à 0 multiplié 3 fois par lui-même a pour produit un nombre inférieur à 0.

18. Puisque $410 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 51{,}25$ g, le temps requis pour passer de 410 g à 51,25 g est de 3 demi-vies.
Le temps requis pour :
- le krypton 85 est de $3 \times 10{,}7 = 32{,}1$ années ;
- le plutonium 239 est de $3 \times 24\,000 = 72\,000$ années ;
- l'iode 129 est de $3 \times 1{,}7 \times 10^7 = 5{,}1 \times 10^7$ années ;
- l'uranium 235 est de $3 \times 7{,}1 \times 10^8 = 2{,}13 \times 10^9$ années ;
- l'uranium 238 est de $3 \times 4{,}5 \times 10^9 = 1{,}35 \times 10^{10}$ années.

19. a) **Nombre d'ordinateurs infectés selon le temps**

Temps (h)	Nombre d'ordinateurs infectés
0	1
1	2
2	4
3	8
4	**16**
5	**32**
6	**64**

b) 1) 1024 ordinateurs.
2) 16 777 216 ordinateurs.
3) 2^{72} ordinateurs.
4) 2^n ordinateurs.

Mise à jour (*suite*)

Page 165

20. a) **Valeur d'une voiture selon le temps écoulé depuis l'achat**

Temps (années)	Valeur ($)
0	35 000
1	**29 750**
2	**25 287,50**
3	**≈ 21 494,38**
4	**≈ 18 270,22**
5	**≈ 15 529,69**

b) 1) $35\ 000(0,85)^{15} \approx 3057,40$ $
2) $35\ 000(0,85)^{20} \approx 1356,58$ $

21. a) 256 plantes.
b) 1024 cm^2
c) ≈ 99,18 m^2

22. a) La balle se trouve à une hauteur de $10\left(\frac{4}{5}\right) = 8$ m.

b) La balle se trouve à une hauteur de $10\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4,096$ m.

c) La balle se trouve à une hauteur de $10\left(\frac{4}{5}\right)^n$ m.

SECTION 3.1 La fonction exponentielle

Problème

Page 166

Énergie produite par les fissions de ^{239}Pu

Étape	Temps (s)	Nombre de fissions simultanées à ce moment	Énergie produite par ces fissions (J)	Énergie suffisante ?
1	10^{-7}	3^0	$2,88 \times 10^{-11}$	Non
2	2×10^{-7}	3^1	$2,88 \times 10^{-11} \times 3 = 8,64 \times 10^{-11}$	Non
3	3×10^{-7}	3^2	$2,88 \times 10^{-11} \times 3^2 \approx 2,59 \times 10^{-10}$	Non
...	...	...	...	...
35	35×10^{-7}	3^{34}	$2,88 \times 10^{-11} \times 3^{34} \approx 480\ 302,83$	Non
36	36×10^{-7}	3^{35}	$2,88 \times 10^{-11} \times 3^{35} \approx 1\ 440\ 908,50$	Oui

Au bout de $3,6 \times 10^{-6}$ s, le nombre de fissions simultanées produisent suffisamment d'énergie pour porter 3 L d'eau à ébullition.

Activité 1

Page 167

a. 12 mol

b. La quantité de ^{60}Co diminue de moins en moins rapidement.

c. **Quantité de ^{60}Co selon le temps**

Temps (mois)	Calculs	Quantité de ^{60}Co (mol)
0	$12 \times 0{,}5^0$	12
64	$12 \times 0{,}5 = 12 \times 0{,}5^1 = 12 \times 0{,}5^{\frac{64}{64}}$	6
128	$12 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 12 \times 0{,}5^2 = 12 \times 0{,}5^{\frac{128}{64}}$	3
192	$12 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 12 \times 0{,}5^3 = 12 \times 0{,}5^{\frac{192}{64}}$	**1,5**
256	$\mathbf{12 \times 0{,}5^{\frac{256}{64}}}$	**0,75**
320	$\mathbf{12 \times 0{,}5^{\frac{320}{64}}}$	**0,375**
384	$\mathbf{12 \times 0{,}5^{\frac{384}{64}}}$	**0,1875**
…	…	…
n	$\mathbf{12 \times 0{,}5^{\frac{n}{64}}}$	

d. Par $0{,}5^{32}$.

e. La courbe se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses sans jamais y toucher.

Activité 2

Page 168

a. **Évolution des températures des deux types de laves**

Temps (h)	0	1	2	3	4
Température de la lave terrestre (°C)	**1200**	**972**	**787,32**	**≈ 637,73**	**≈ 516,56**
Température de la lave sous-marine (°C)	**1200**	**491,52**	**≈ 201,33**	**≈ 82,46**	**≈ 33,78**

b. 1) De 19 %. **2)** De 59,04 %.

c. $T = 1200(0{,}8)^{4x}$

d. Oui, car $1200(0{,}9)^{2x} = 1200(0{,}9^2)^x = 1200(0{,}81)^x$.

e. $1200(0{,}8)^{4x} = 1200(0{,}8^4)^x = 1200(0{,}4096)^x$

Activité 3

Page 169

a. **Valeur d'un placement selon la période de calcul des intérêts**

Nombre de périodes par année	Intérêts calculés à chaque période (%)	Calcul	Valeur du placement à la fin de l'année ($)
1 (annuellement)	100	1×2	2
2 (semestriellement)	50	$1 \times 1{,}5^2$	2,25
4 (trimestriellement)	25	$1 \times 1{,}25^4$	**≈ 2,44**
12 (mensuellement)	$\mathbf{8{,}\overline{3}}$	$\mathbf{1 \times (1{,}08\overline{3})^{12}}$	**≈ 2,61**
52 (chaque semaine)	**≈ 1,92**	$\mathbf{1 \times 1{,}0192^{52}}$	**≈ 2,69**
365 (chaque jour)	**≈ 0,27**	$\mathbf{1 \times 1{,}0027^{365}}$	**≈ 2,71**
8760 (chaque heure)	**≈ 0,01**	$\mathbf{1 \times 1{,}0001^{8760}}$	**≈ 2,72**
n	$\frac{100}{n}$	$1 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	

b. **1)** 2 **2)** 2,25 **3)** ≈ 2,44 **4)** ≈ 2,61
5) ≈ 2,69 **6)** ≈ 2,71 **7)** ≈ 2,72

c. Ce sont les mêmes résultats.

d. Vers une valeur d'environ 2,7183.

e. C'est la même valeur qu'en **d.**

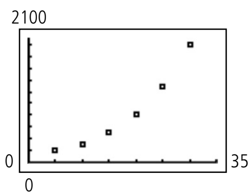
f. ≈ 2,72 $

Technomath

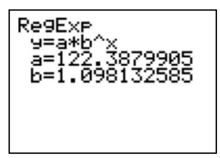
Page 170

a. La valeur de a représente la valeur initiale de la fonction et la valeur de b représente la base.

b. **1)**

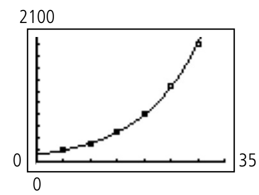


2)



$y \approx 122{,}39(1{,}098)^x$

3)



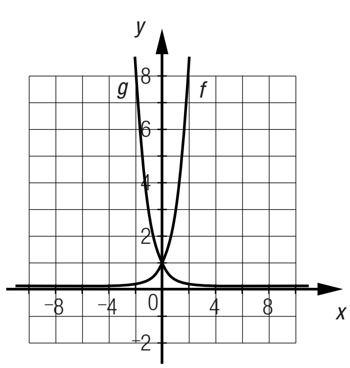
Mise au point 3.1

Page 173

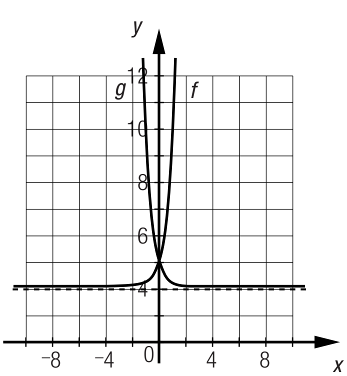
1.

	Règle de la fonction	Domaine	Codomaine	Valeur initiale	Variation	Équation de l'asymptote
a)	$y_1 = 3\left(\frac{1}{5}\right)^x$	$\mathbb{R}$	**]0, +∞[**	**3**	**Décroissante**	$\boldsymbol{y = 0}$
b)	$y_2 = 2{,}5^x$	$\mathbb{R}$	**]0, +∞[**	**1**	**Croissante**	$\boldsymbol{y = 0}$
c)	$y_3 = 3(5)^{x-3} + 1$	$\mathbb{R}$	**]1, +∞[**	**1,024**	**Croissante**	$\boldsymbol{y = 1}$
d)	$y_4 = 4(0{,}3)^{-(x-4)} + 2$	$\mathbb{R}$	**]2, +∞[**	**2,0324**	**Croissante**	$\boldsymbol{y = 2}$
e)	$y_5 = 2{,}5(1{,}01)^{12x}$	$\mathbb{R}$	**]0, +∞[**	**2,5**	**Croissante**	$\boldsymbol{y = 0}$
f)	$y_6 = 3000(0{,}95)^{\frac{x}{6}}$	$\mathbb{R}$	**]0, +∞[**	**3000**	**Décroissante**	$\boldsymbol{y = 0}$

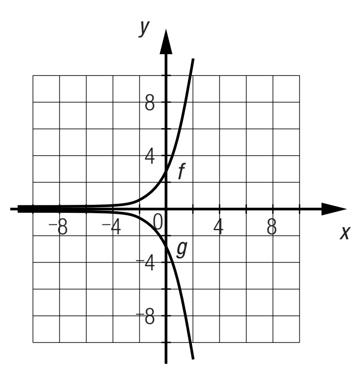
2. **a)** **1)**



2)



3)



b) **1)** Une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.
2) Une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.
3) Une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.

3. **a)** Décroissante. **b)** Croissante. **c)** Décroissante.
d) Croissante. **e)** Croissante. **f)** Croissante.

4. **a)** **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine :]−250, +∞[. **2)** ≈ −249,99
3) Cette fonction est décroissante. **4)** $y = -250$

b) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 1{,}28[$. **2)** 0
3) Cette fonction est croissante. **4)** $y = 1{,}28$

c) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-207{,}36, +\infty[$. **2)** $-87{,}36$
3) Cette fonction est croissante. **4)** $y = -207{,}36$

d) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 337{,}5[$. **2)** $\approx 324{,}33$
3) Cette fonction est décroissante. **4)** $y = 337{,}5$

e) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-10\,711{,}05, +\infty[$. **2)** $-211{,}05$
3) Cette fonction est croissante. **4)** $y = -10\,711{,}05$

f) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-32, +\infty[$. **2)** 4064
3) Cette fonction est décroissante. **4)** $y = -32$

Mise au point 3.1 (*suite*) Page 174

5. a) $f(x) = 2(3)^x + 2$ **b)** $f(x) = 25(5)^x - 2$ **c)** $f(x) = -25(0{,}2)^x + 1$
d) $f(x) = 32(0{,}5)^x - 8$ **e)** $f(x) = 1{,}5(2)^x - 1$ **f)** $f(x) = -32(0{,}5)^x - 8$

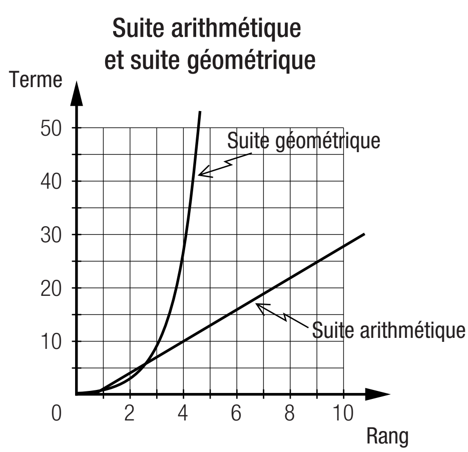
6. a) **1)** $f(x) = 4(6)^x$ **2)** $f(x) = 3(1{,}5)^x$ **3)** $f(x) = -3^x$ **4)** $f(x) = 2(0{,}5)^x$
b) **1)** $f(x) = 3(2)^x + 7$ **2)** $f(x) = 10(5)^x - 15$ **3)** $f(x) = 0{,}5(10)^x + 300\,000$ **4)** $f(x) = 3(4)^x - 5$

Mise au point 3.1 (*suite*) Page 175

7. a) **1)** $(f \times g)(x) = -0{,}25(2)^{4x + 5}$ **2)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = -4(2)^{2x - 5}$

b) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 0[$. **2)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]-\infty, 0[$.

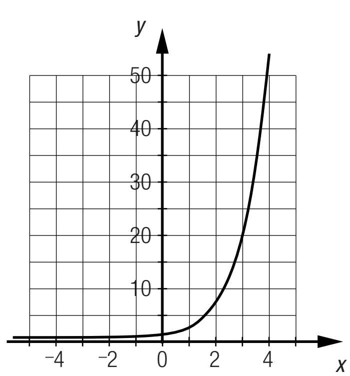
8. a)



b) Suite arithmétique : fonction polynomiale de degré 1 ;
suite géométrique : fonction exponentielle.

c) Suite arithmétique : $y = 3x - 2$;
suite géométrique : $y = 3^{x-1}$ ou $y = \frac{1}{3}(3)^x$.

9. a)



b) $y = 0$

c) **1)** Domaine : $\mathbb{R}$; codomaine : $]0, +\infty[$.
2) Cette fonction est croissante.
3) La valeur initiale est 1.

10. $5400 \times 1{,}036^{10} \approx 7691{,}15\,\$$

Mise au point 3.1 (*suite*) **Page 176**

11. a) 26 500 $ **b)** $\frac{26\,500}{25\,000} = 106\,\%$ **c)** $25\,000 \times 1{,}03^2 = 26\,522{,}50$ $ **d)** $\frac{26\,522{,}50}{25\,000} = 106{,}09\,\%$

e)

Plan A				Plan B			
Temps (mois)	**Temps (années)**	**Calcul**	**Valeur du placement ($)**	**Temps (mois)**	**Temps (années)**	**Calcul**	**Valeur du placement ($)**
0	0	$25\,000(1{,}06)^0$	25 000	0	0	$25\,000(1{,}03)^0$	25 000
				6	0,5	$25\,000(1{,}03)^1$	**25 750**
12	1	$\mathbf{25\,000(1{,}06)^1}$	**26 500**	12	1	$25\,000(1{,}03)^2$	**26 522,50**
				18	1,5	$\mathbf{25\,000(1{,}03)^3}$	**≈ 27 318,18**
24	2	$\mathbf{25\,000(1{,}06)^2}$	**28 090**	24	2	$\mathbf{25\,000(1{,}03)^4}$	**≈ 28 137,72**
				30	2,5	$\mathbf{25\,000(1{,}03)^5}$	**≈ 28 981,85**
36	3	$\mathbf{25\,000(1{,}06)^3}$	**29 775,40**	36	3	$\mathbf{25\,000(1{,}03)^6}$	**≈ 29 851,31**
				42	3,5	$\mathbf{25\,000(1{,}03)^7}$	**≈ 30 746,85**
48	4	$\mathbf{25\,000(1{,}06)^4}$	**≈ 31 561,92**	48	4	$\mathbf{25\,000(1{,}03)^8}$	**≈ 31 669,25**
…	…	…	…	…	…	…	…
	x	$\mathbf{25\,000(1{,}06)^x}$			x	$\mathbf{25\,000(1{,}03)^{2x}}$	

f) Le placement **B** est le plus avantageux car, dans ce plan, la deuxième tranche d'intérêts de 3 % est calculée sur un montant auquel on a déjà ajouté 3 %.

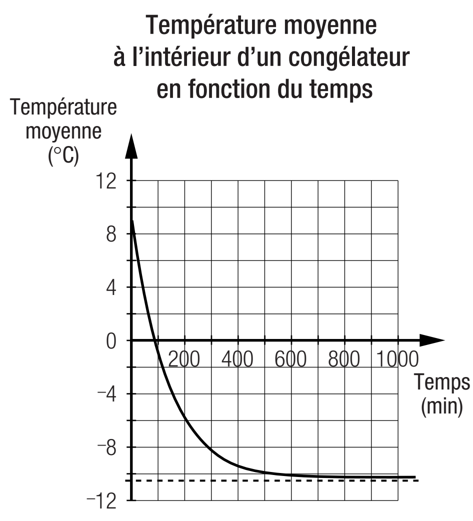
Mise au point 3.1 (*suite*) **Page 177**

12. a) 1) 13,5 V **2)** ≈ 3,50 V

b) Cette fonction est décroissante.

c) Domaine : [0, 216] jours ; codomaine : $[4{,}87 \times 10^{-8}, 13{,}5]$ V.

13. a)



b) 1) $y = -10{,}5$

2) Même si théoriquement cette température ne sera jamais atteinte, c'est la température « minimale » du congélateur.

c)]−10,5, 9] °C

d) 9 °C

14. a) $p \approx 10^d$

b) L'opacité est environ de 316,23 unités.

c) Non, puisqu'il s'agit d'une fonction exponentielle dont l'équation de l'asymptote est $y = 0$, c'est-à-dire que la valeur de l'opacité tendra vers 0 sans jamais l'atteindre.

Mise au point 3.1 (*suite*)

Page 178

15. a) ≈ 29,53 % **b)** ≈ 50,34 % **c)** ≈ 82,62 %

16. $V = V_0(1{,}005)^{3x}$, où V_0 représente la valeur initiale du placement.

17. Il restera environ 1197 grenouilles.

18. a) $I = (1{,}02)^x$, où I représente l'intervalle de temps (en h) entre chaque cigarette fumée et x représente le nombre de jours écoulés depuis le début du processus.

b) 1) ≈ 1,15 h ou ≈ 1 h 9 min. **2)** ≈ 1,81 h ou ≈ 1 h 49 min. **3)** ≈ 19,5 h ou ≈ 19 h 30 min.

SECTION 3.2 La fonction logarithmique

Problème

Page 179

D'après le tableau ci-contre, lorsque la magnitude augmente de 1 unité, l'énergie libérée est environ 31,5 fois plus élevée.

Un séisme de magnitude 10 sur l'échelle de Richter libère donc environ $31{,}5^4 \approx 984\ 560$ fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 6.

Énergie libérée par un séisme en fonction de sa magnitude sur l'échelle de Richter

Magnitude	Énergie libérée (J)	
1	$4{,}2 \times 10^6$	
2	$1{,}323 \times 10^8$	× 31,5
3	$4{,}167 \times 10^9$	× ≈ 31,5
4	$1{,}313 \times 10^{11}$	× ≈ 31,5

Activité 1

Page 180

a. **Évolution du pourcentage de ^{14}C dans un organisme depuis sa mort**

Temps (années)	Pourcentage de ^{14}C
0	10^{-10}
5 730	5×10^{-11}
11 460	$2{,}5 \times 10^{-11}$
17 190	$1{,}25 \times 10^{-11}$
22 920	$\mathbf{6{,}25 \times 10^{-12}}$
28 650	$\mathbf{3{,}125 \times 10^{-12}}$
34 380	$\mathbf{1{,}5625 \times 10^{-12}}$

b. Le pourcentage de ^{14}C diminue de moitié tous les 5730 ans par rapport à la période précédente.

c. À une fonction exponentielle.

d. 1) $\approx 3{,}91 \times 10^{-13}$ % **2)** $\approx 9{,}77 \times 10^{-14}$ %

e. 1) 40 110 ans. **2)** 45 840 ans.

f. Ces deux graphiques représentent des fonctions réciproques, car les couples de chacune des fonctions peuvent être obtenus en intervertissant les valeurs de chacun des couples de l'autre fonction.

g. 1) f^{-1} **2)** f

Technomath

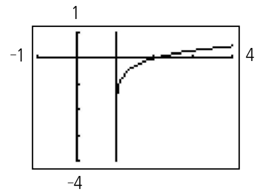
Page 181

a. Y_1 : b = 1 et h = 2,4 ; Y_2 : b = 2 et h = −1,8 ; Y_3 : b = −2 et h = −4,2.

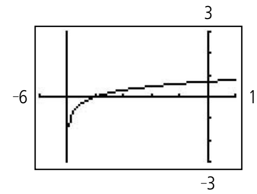
b. **1)** $y = -4{,}2$ **2)** $y = -1{,}8$ **3)** $y = 2{,}4$

c. L'équation de l'asymptote verticale associée à une fonction logarithmique dont la règle s'écrit sous la forme $y = \log b(x - h)$ est $x = h$.

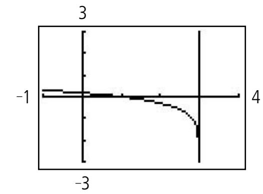
d. **1)**



2)



3)



Mise au point 3.2

Page 184

1. **a)** $4 = \log_3 81$ **b)** $6 = \log_2 64$ **c)** $\frac{3}{2} = \log_5 \sqrt{125}$ **d)** $\frac{1}{2} = \log_{144} 12$

e) $-2 = \log 0{,}01$ **f)** $3 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ **g)** $0 = \log_3 1$ **h)** $-4 = \log_{\frac{1}{4}} 256$

2. **a)** $2^5 = 32$ **b)** $10^3 = 1000$ **c)** $4^{-1} = \frac{1}{4}$ **d)** $10^{-4} = 0{,}0001$

e) $10^1 = 10$ **f)** $5^0 = 1$ **g)** $2^{-4} = \frac{1}{16}$ **h)** $3^4 = 3^4$

3. **a)** 4 **b)** 3 **c)** 3 **d)** 3

e) −2 **f)** −4 **g)** −3 **h)** 1

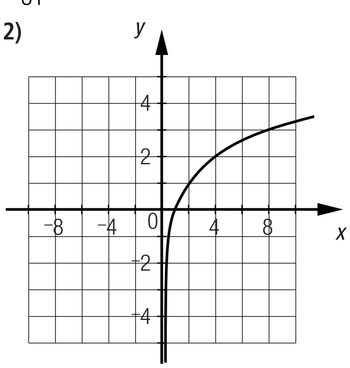
4. **a)** 4 **b)** 100 **c)** −2 **d)** $\frac{3}{2}$

e) 10 **f)** $\frac{1}{81}$ **g)** 3 **h)** $\sqrt{12}$

5. **a)** **1)**

$f(x) = \log_2 x$	
x	y
$\frac{1}{8}$	**−3**
$\frac{1}{4}$	**−2**
$\frac{1}{2}$	**−1**
1	**0**
2	**1**
4	**2**
8	**3**

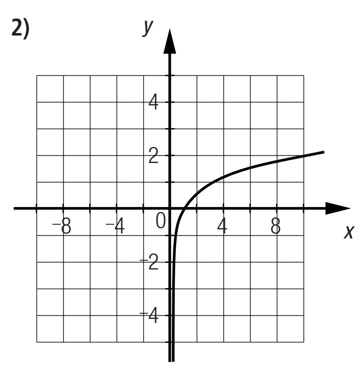
2)



b) **1)**

$g(x) = \log_3 x$	
x	y
$\frac{1}{27}$	**−3**
$\frac{1}{9}$	**−2**
$\frac{1}{3}$	**−1**
1	**0**
3	**1**
9	**2**
27	**3**

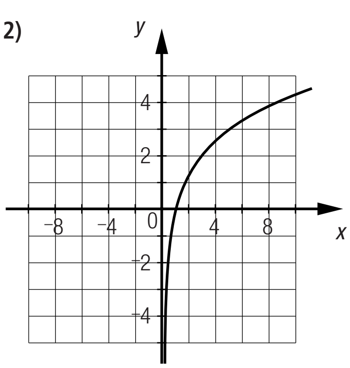
2)



c) **1)**

$h(x) = 3\log_5 x$	
x	y
$\frac{1}{125}$	**−9**
$\frac{1}{25}$	**−6**
$\frac{1}{5}$	**−3**
1	**0**
5	**3**
25	**6**
125	**9**

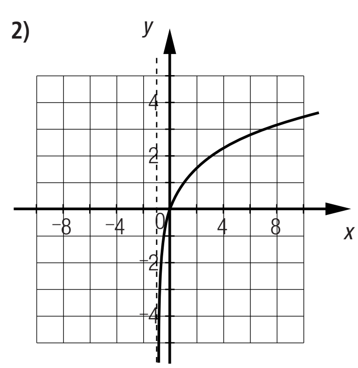
2)



d) **1)**

$i(x) = \log_2(x + 1)$	
x	y
$-\frac{7}{8}$	**−3**
$-\frac{3}{4}$	**−2**
$-\frac{1}{2}$	**−1**
0	**0**
1	**1**
3	**2**
7	**3**

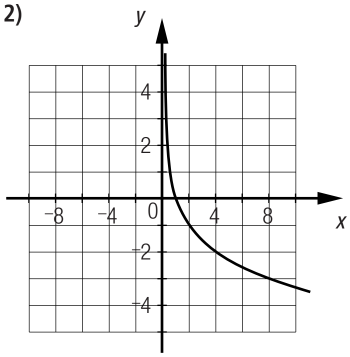
2)



e) 1)

$j(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	
x	y
$\frac{1}{8}$	**3**
$\frac{1}{4}$	**2**
$\frac{1}{2}$	**1**
1	**0**
2	**−1**
4	**−2**
8	**−3**

2)



Mise au point 3.2 (*suite*)

6. a) $\approx 1{,}49$ **b)** $\approx 1{,}79$ **c)** $\approx 0{,}40$ **d)** $\approx 1{,}91$
e) $\approx -0{,}69$ **f)** $\approx 0{,}43$ **g)** $\approx 2{,}30$ **h)** $\approx -0{,}74$

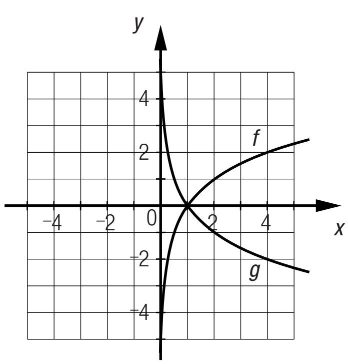
7. a) $f^{-1}(x) = \log_3 x$ **b)** $g^{-1}(x) = \log_{0,8}(x - 7)$ **c)** $h^{-1}(x) = \ln\frac{x}{3}$
d) $i^{-1}(x) = \log\frac{2}{9}(x + 5) + 2$ **e)** $j^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}}\frac{20}{3}x$ **f)** $k^{-1}(x) = 2\ln\frac{x}{5}$

8. a) $f^{-1}(x) = 5^x$ **b)** $g^{-1}(x) = 10^{\frac{2x}{9}} + 3$ **c)** $h^{-1}(x) = e^{\frac{20x}{47}}$
d) $i^{-1}(x) = \frac{1}{2}(2)^{\frac{2}{15}(x - 5)}$ **e)** $j^{-1}(x) = 10^{2(x - 1)} + 4$ **f)** $k^{-1}(x) = 2e^{2x}$

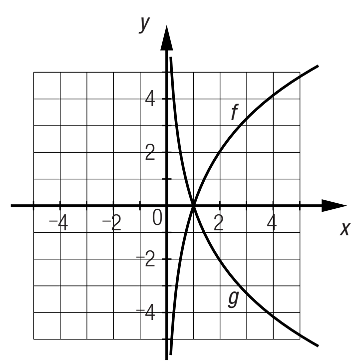
9.

	Règle de la fonction	Base	Équation de l'asymptote	Domaine	Codomaine
a)	$f(x) = 2\log_2 x$	**2**	$x = 0$	**]0, +∞[**	$\mathbb{R}$
b)	$g(x) = \log x$	**10**	$x = 0$	**]0, +∞[**	$\mathbb{R}$
c)	$h(x) = 3\log_{1,5}(x - 4) + 2$	**1,5**	$x = 4$	**]4, +∞[**	$\mathbb{R}$
d)	$i(x) = \log_{0,5} x - 1$	**0,5**	$x = 0$	**]0, +∞[**	$\mathbb{R}$
e)	$j(x) = \ln x$	**e**	$x = 0$	**]0, +∞[**	$\mathbb{R}$
f)	$k(x) = -\log_3(x + 1) - 5$	**3**	$x = -1$	**]−1, +∞[**	$\mathbb{R}$

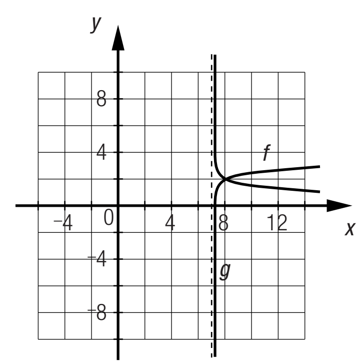
10. a) 1)



2)



3)



b) 1) Une réflexion par rapport à l'axe des abscisses. **2)** Une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
3) Une réflexion par rapport à l'axe d'équation $y = 2$.

11. a) Croissante. **b)** Décroissante. **c)** Croissante.
d) Croissante. **e)** Décroissante. **f)** Croissante.

Mise au point 3.2 (*suite*)

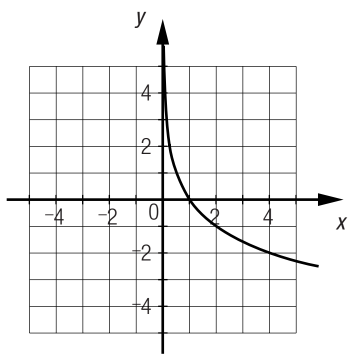
12. a) $f(x) = \log_2\frac{1}{2}(x - 3)$ **b)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$ **c)** $f(x) = \log_{\frac{3}{2}}-(x - 5)$
d) $f(x) = \log_7 -\frac{1}{3}(x + 7)$ **e)** $f(x) = \log_8\frac{2}{3}(x - 8)$ **f)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{7}(x + 10)$

13.

Fonction	f	f^{-1}
Règle	$\mathbf{f(x) = -1{,}5(2)^x + 4}$	$\mathbf{f^{-1}(x) = \log_{2}\frac{2}{3}(-x + 4)}$
Domaine	$\mathbb{R}$	**]−∞, 4[**
Codomaine	**]−∞, 4[**	$\mathbb{R}$

Mise au point 3.2 (*suite*)

14. a) Les deux courbes sont superposées.



b) $y = -\log_2 x \Leftrightarrow -y = \log_2 x$

$\Leftrightarrow 2^{-y} = x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = x$

$\Leftrightarrow y = \log_{\frac{1}{2}} x$

15. a) 1) Aucune valeur initiale. **2)** $x = 0$

b) 1) La valeur initiale est 3. **2)** $x = 4$

c) 1) Aucune valeur initiale. **2)** $x = 0$

d) 1) Aucune valeur initiale. **2)** $x = 5$

e) 1) Aucune valeur initiale. **2)** $x = 0$

f) 1) La valeur initiale est 1. **2)** $x = e$

16. **Intensité d'un son en fonction de la pression acoustique**

Nature du son	Pression (Pa)	Intensité (dB)	Perception
Tonnerre	11,25	**≈ 115**	**Dangereuse**
Sirène de pompiers	35,56	**≈ 125**	**Insupportable**
Conversation normale	0,02	**60**	**Normale**
Abords d'une autoroute achalandée	1,12	**≈ 94,96**	**Douloureuse**
Discothèque	5,02	**≈ 107,99**	**Dangereuse**
Concert rock	63,25	**≈ 130**	**Insupportable**

Mise au point 3.2 (*suite*)

17. a) 1) 5000 volts. **2)** $\approx 4{,}74 \times 10^{-15}$ volts.

b) 1) $t = -\frac{10}{83}\ln\left(\frac{v}{5000}\right)$ **2)** $\approx 8{,}35 \times 10^{-2}$ ms

18. a) $[H^+] = 10^{-(pH)}$

b) **Caractéristiques de certains liquides**

Liquide	$[H^+]$ (mol/L)	pH
Lait	$\mathbf{\approx 1{,}74 \times 10^{-7}}$	6,76
Jus d'orange	$1{,}95 \times 10^{-4}$	**≈ 3,71**
Eau de Javel	$1{,}78 \times 10^{-13}$	**≈ 12,75**
Café	$\mathbf{\approx 1{,}29 \times 10^{-5}}$	4,89
Sang humain	$4{,}57 \times 10^{-8}$	**≈ 7,34**
Acides gastriques	$6{,}17 \times 10^{-2}$	**≈ 1,21**
Eau distillée	$\mathbf{1 \times 10^{-7}}$	7
Thé	$\mathbf{\approx 3{,}16 \times 10^{-6}}$	5,5

Mise au point 3.2 (*suite*)

19. a) $\approx 27{,}38$ MJ

b) 1) $v = 4095 \ln 0{,}1(E + 10)$ **2)** $\approx 7337{,}26$ tours/min

20. a) $t = 2\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{Q}{100}\right)$ **b)** $t = {}^-2\log\left(\frac{Q}{100}\right)$ **c)** $\approx 0{,}25$ h ou ≈ 15 min.

SECTION 3.3 Les situations exponentielles et logarithmiques

Problème

La règle $n = 4\,214\,835\left(\frac{1}{3}\right)^t$ permet de déterminer le nombre n de bactéries restantes en fonction du temps t (en min). L'utilisation d'une table de valeurs permet d'observer que la solution recherchée se situe entre 7 et 8 min, plus précisément entre 7,5 et 7,6 min et, encore plus précisément, entre 7,59 et 7,60 min.

Un bistouri doit donc passer au moins environ 7,60 min dans l'autoclave.

Activité 1

a. On peut passer :
- de ① à ②, puisque $m = c^n$;
- de ② à ③, par la loi des exposants $(c^n)^x = c^{xn}$;
- de ③ à ④, par l'équivalence $m^x = c^{xn} \Leftrightarrow xn = \log_c m^x$;
- de ④ à ⑤, puisque $n = \log_c m$.

b. 1) 36 **2)** 7,5 **3)** $^-6$ **4)** $^-6{,}8$

c. Puisque $\log 9^{5000}$ est équivalent à $5000 \log 9$, il suffit de calculer $\log 9$ et de multiplier le résultat par 5000. Ainsi, $\log 9^{5000} = 5000 \log 9$, soit $5000 \times \approx 0{,}95 \approx 4771{,}21$.

d. On peut passer :
- de ① à ②, puisque $m = c^n$;
- de ② à ③, puisque $\log_d c^n = n\log_d c$ (équivalence vue précédemment) ;
- de ③ à ④, en divisant les deux membres de l'équation par $\log_d c$;
- de ④ à ⑤, puisque $n = \log_c m$.

Activité 1 (*suite*)

e. À l'aide de l'équivalence $\log_c m = \frac{\log_d m}{\log_d c}$, où $d = $ e ou $d = 10$, il est possible de calculer le logarithme d'un nombre dans n'importe quelle base.

f. 1) $\log_6 77$ **2)** $\log_5 0{,}7$ **3)** $\log_{\frac{1}{3}} 8$

g. 1) $y = \log_5 x$ **2)** $y = \log_{5,2}(x + 4)$ **3)** $y = \log_{0,2}\frac{x}{5}$

Activité 2

a. 20 °C

b. 1) $0{,}94^x = 0{,}94$ **2)** Parce que $0{,}94^1 = 0{,}94$. Ainsi, $x = 1$.

c. 1) On peut passer :
- de ① à ②, en additionnant 200 aux deux membres de l'équation ;
- de ② à ③, en divisant les deux membres de l'équation par 220 ;
- de ③ à ④, puisque $\frac{1}{55} = 0{,}94^x \Leftrightarrow x = \log_{0,94}\frac{1}{55}$;
- de ④ à ⑤, puisque $\log_{0,94}\frac{1}{55} \approx 64{,}76$.

2) La valeur obtenue représente le temps requis (en min) pour que l'échantillon atteigne une température de $^-196$ °C.

d. $^-196 \geq 220(0,94)^x - 200$

e. $x \geq \approx 64,76$ min

Activité 3

Page 194

a. **1)** Le zéro.

2) On peut passer :
- de ① à ②, en additionnant 18 aux deux membres de l'équation ;
- de ② à ③, en divisant les deux membres de l'équation par 9 ;
- de ③ à ④, puisque $\log(x + 5) = 2 \Leftrightarrow x + 5 = 10^2$;
- de ④ à ⑤, car $10^2 = 100$;
- de ⑤ à ⑥, en soustrayant 5 des deux membres de l'inéquation.

b. $]^-5, ^+\infty[$

c. L'intervalle où f est négative.

d. $]^-5, 95]$

Mise au point 3.3

Page 198

1. **a)** $c\log_a(4b)$ **b)** $2\log x$ **c)** $3\ln(2 + x)$ **d)** $\frac{1}{2}\ln 3x$
e) $^-\log_c 3x$ **f)** $3\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ **g)** $d\log_a y$ **h)** $^-2\ln x$

2. **a)** $\log_3 6^4$ **b)** $\log_7 5^2$ **c)** $\ln(3t)^2$
d) $\log 5^3$ **e)** $\log_m x^2$ **f)** $\log 2^4$
g) $\log_3 9^7$ **h)** $\log_5 10^9$ **i)** $\log_6 y^4$

3. **a)** $\approx 5,91$ **b)** $\approx 2,77$ **c)** $\approx 2,32$ **d)** $\approx 3,21$
e) 0,5 **f)** $^-1$ **g)** $^-6$ **h)** $\approx {}^-5,72$

4. **a)** $\approx 2,3980$ **b)** $\approx 3,513$ **c)** $\approx 2,2695$ **d)** $\approx {}^-0,7565$
e) $\approx 44,5977$ **f)** $\approx {}^-2,3980$ **g)** $\approx 1,0619$ **h)** $\approx {}^-0,8783$
i) $\approx 0,3997$ **j)** $\approx {}^-4,2474$ **k)** $\approx 0,8905$ **l)** $\approx 16,8483$

Mise au point 3.3 (*suite*)

Page 199

5. **a)** $x \approx {}^-6,81$ **b)** $x = 10^{46}$ **c)** $x \approx 3,53$ **d)** $x \approx {}^-5$
e) $x = {}^-24$ **f)** $x \approx {}^-0,09$ **g)** $x = {}^-81$ **h)** $x \approx 0,34$

6. **a)** $x > 2,15$ **b)** $x \geq e^{18}$ **c)** $x > 33,\overline{3}$ **d)** $x \geq 6$
e) $^-99\,998 < x < 2$ **f)** $x > {}^-1,29$ **g)** $x \geq {}^-2,40$ **h)** $x > \frac{9}{8}$

7. **a)** **1)** $\approx 6,14$ **2)** Positif : $[\approx 6,14, ^+\infty[$ et négatif : $]^-\infty, \approx 6,14]$.
b) **1)** $^-1$ **2)** Positif : $[^-1, ^+\infty[$ et négatif : $]^-2, ^-1]$.
c) **1)** $\approx 3,74$ **2)** Positif : $]^-\infty, \approx 3,74]$ et négatif : $[\approx 3,74, ^+\infty[$.
d) **1)** $\approx 7,04$ **2)** Positif : $[\approx 7,04, ^+\infty[$ et négatif : $]7, \approx 7,04]$.
e) **1)** $\approx 1,16$ **2)** Positif : $]^-\infty, \approx 1,16]$ et négatif : $[\approx 1,16, ^+\infty[$.
f) **1)** $\frac{1}{e^2}$ **2)** Positif : $\left]0, \frac{1}{e^2}\right]$ et négatif : $\left[\frac{1}{e^2}, ^+\infty\right[$.

8. **a)** $x = \sqrt{3}$ **b)** $x = \sqrt[5]{625}$ **c)** $x = \frac{1}{6}$ **d)** $x = \sqrt{6} - 4$

9. **a)** $x = 8$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = \sqrt{10} - 2$ **d)** $x = {}^-4$
e) $x = 1002$ **f)** $x = 6$ **g)** $x = e$ ou $x = {}^-e$. **h)** $x = \frac{1}{3}$
i) $x = 5$ **j)** $x = 2$ ou $x = 5$.

10. a) À $t = 0$ année.

c) À environ 12,86 années.

b) $20\,000 = 15\,000(1{,}015)^{2t}$

$$\frac{4}{3} = 1{,}015^{2t}$$

$$2t = \log_{1{,}015}\frac{4}{3}$$

$$t = \frac{\log\frac{4}{3}}{2\log 1{,}015}$$

$$t \approx 9{,}66$$

À environ 9,66 années.

Mise au point 3.3 (*suite*)

11.

A	T	T_0
30	**≈ 395,28**	12,5
≈ 4,08	16	10
60	18	**0,018**
15	**≈ 84,35**	15
≈ 6,02	36	18
45	9	**≈ 0,05**

12. $2500 = 1500(1{,}0175)^{2t}$

$$\frac{5}{3} = 1{,}0175^{2t}$$

$$2t = \log_{1{,}0175}\frac{5}{3}$$

$$t = \frac{\log\frac{5}{3}}{2\log 1{,}0175}$$

$$t \approx 14{,}72$$

Au bout d'environ 14,72 ans.

13. a) **1)** $\approx -1{,}51$ **2)** $-7{,}5$ **3)** $-12{,}5$ **4)** $\approx 1{,}51$

b) **1)** À $\approx 19{,}05$ fois. **2)** À $\approx 8{,}3 \times 10^{-4}$ fois. **3)** À $\approx 10\,964{,}78$ fois.

Mise au point 3.3 (*suite*)

14. Le temps nécessaire à la dégradation complète :
- d'un sac en plastique est environ de 461,75 ans ;
- d'un mouchoir de papier est environ de 0,25 an (3 mois) ;
- d'un carton de lait est environ de 49,88 ans ;
- d'une gomme à mâcher est environ de 5 ans ;
- d'une pile alcaline est environ de 6931,13 ans.

15. $0{,}1(1{,}26)^{2s + 20} = 200$

$$1{,}26^{2s + 20} = 2000$$

$$2s + 20 = \log_{1{,}26}2000$$

$$2s + 20 = \frac{\log 2000}{\log 1{,}26}$$

$$s \approx 6{,}44$$

La mise en garde doit être émise environ 6,44 semaines après le 1er mai.

16. a) **1)** 64 **2)** $\approx 51{,}98$ **3)** $\approx 37{,}39$ **4)** $\approx 32{,}08$

b) **1)** 1 048 576 **2)** $\approx 104\,031{,}92$ **3)** $\approx 2671{,}54$ **4)** $\approx 486{,}71$

c) **1)** $A = 2^{-0{,}3\log_2 B + 6}$ **2)** $B = 2^{\frac{\log_2 A - 6}{-0{,}3}}$

17. Ce réseau atteint sa capacité maximale environ 25,09 ans après l'installation.

Mise au point 3.3 (*suite*) **Page 202**

18. a) 1) $\approx 0{,}6990$, $\approx 1{,}6990$, $\approx 2{,}6990$, $\approx 3{,}6990$ **2)** $\approx 0{,}9031$, $\approx 1{,}9031$, $\approx 2{,}9031$, $\approx 3{,}9031$

b) À une multiplication de l'argument par 10 est associée une augmentation de 1 du logarithme.

19. a) 1) 60 min **2)** 42 min **3)** $\approx$ 2,42 min

b) 1) Au moins 2 pièces. **2)** Au moins 3 pièces. **3)** Au moins 5 pièces.

20. La température est de 0 °C environ 3,03 h après la mise sous tension.

21. a) 1) $\approx$ 8,11 % **2)** $\approx$ 5,78 % **3)** $\approx$ 4,58 %

b) 1) $\approx$ 4,96 ans **2)** $\approx$ 15,4 ans **3)** $\approx$ 24,41 ans

c) 1) $r = \frac{\ln 2}{t}$ **2)** $t = \frac{\ln 2}{r}$

Mise au point 3.3 (*suite*) **Page 203**

22. a) La température initiale du premier alliage est de 20 °C, celle du second est de 40 °C.

b)
$$20(2)^x = 40(4)^{\frac{2x}{5}}$$
$$2^x = 2(2)^{\frac{4x}{5}}$$
$$2^x = 2^{\frac{4x}{5}+1}$$
$$x = \frac{4x}{5} + 1$$
$$x = 5$$
Au bout de 5 h.

c)
$$20(2)^x = 80(4)^{\frac{2x}{5}}$$
$$2^x = 4(2)^{\frac{4x}{5}}$$
$$2^x = 2^{\frac{4x}{5}+2}$$
$$x = \frac{4x}{5} + 2$$
$$x = 10$$
Au bout de 10 h.

23. a) 1) $\approx$ 18,99 cm **2)** $\approx$ 45,75 cm

b) 1) $\approx$ 91,50 cm **2)** $\approx$ 12,30 cm

RUBRIQUES PARTICULIÈRES 3

Chronique du passé **Page 205**

1. a) 0,8439 % $\times$ 85 000 $\approx$ 717,32 $ **b)** 129 116,70 $

2. a) 2 584 929 **b)** 45 **c)** 262 144

d) 16 807 **e)** 21 **f)** 2 585 869

Le monde du travail **Page 207**

1. a) Surdité légère (seuil d'environ 34,81 dB).

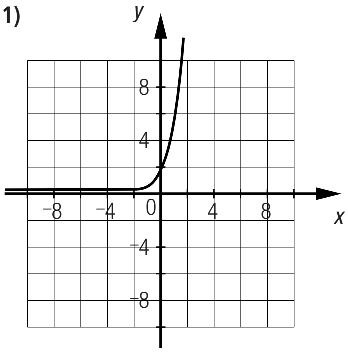
b) Surdité moyenne (seuil d'environ 49,97 dB).

c) Surdité légère (seuil de 20 dB).

2. $F = 62{,}5(2)^n$, où F représente la fréquence (en Hz) et n, le numéro de l'étape du test d'audition tonale.

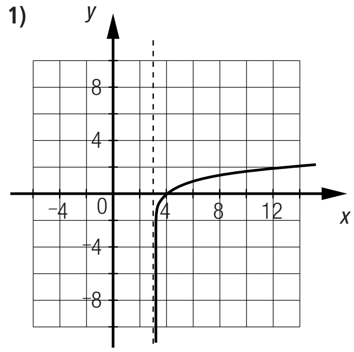
Vue d'ensemble

1. a) 1)



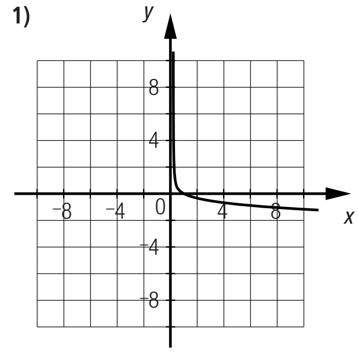
2) Domaine : ℝ ; codomaine :]0, +∞[.
3) 1,8
4) Aucun zéro.
5) Positif : ℝ.

b) 1)



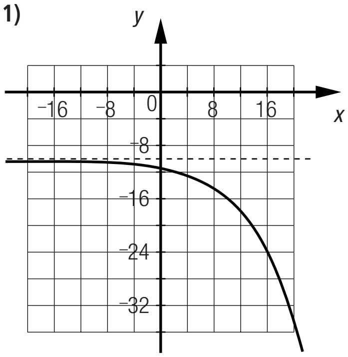
2) Domaine :]3, +∞[; codomaine : ℝ.
3) Aucune valeur initiale.
4) 4
5) Positif : [4, +∞[
et négatif :]3, 4].

c) 1)



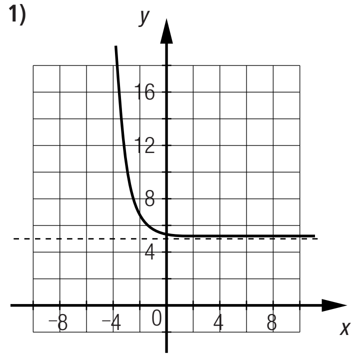
2) Domaine :]0, +∞[; codomaine : ℝ.
3) Aucune valeur initiale.
4) 1
5) Positif :]0, 1]
et négatif : [1, +∞[.

d) 1)



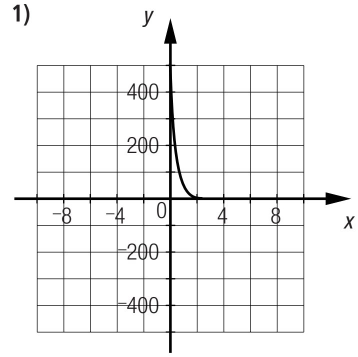
2) Domaine : ℝ ; codomaine :]−∞, −10[.
3) ≈ −11,49
4) Aucun zéro.
5) Négatif : ℝ.

e) 1)



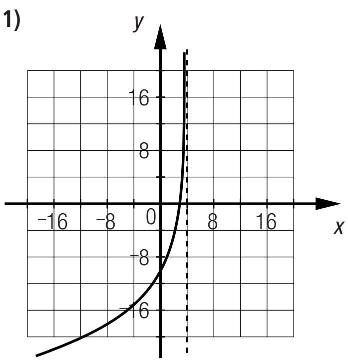
2) Domaine : ℝ ; codomaine :]5, +∞[.
3) 5,15
4) Aucun zéro.
5) Positif : ℝ.

f) 1)



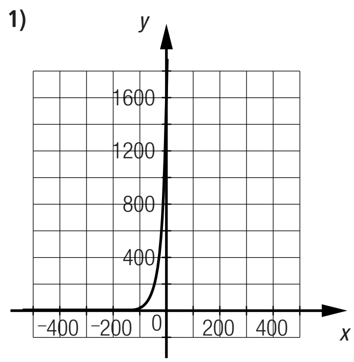
2) Domaine : ℝ ; codomaine :]0, +∞[.
3) 450
4) Aucun zéro.
5) Positif : ℝ.

g) 1)



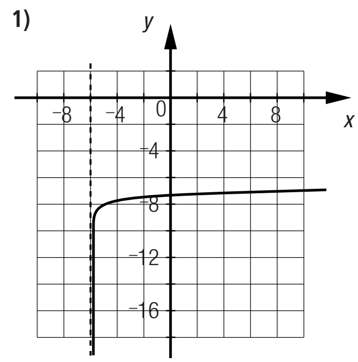
2) Domaine :]−∞, 4[; codomaine : ℝ.
3) −10
4) 3
5) Négatif :]−∞, 3]
et positif : [3, 4[.

h) 1)



2) Domaine : ℝ ; codomaine :]0, +∞[.
3) 1500
4) Aucun zéro.
5) Positif : ℝ.

i) 1)



2) Domaine :]−6, +∞[; codomaine : ℝ.
3) ≈ −7,33
4) ≈ 2 087 372 975,67
5) Négatif :
[−6, ≈ 2 087 372 975,67]
et positif :
[≈ 2 087 372 975,67, +∞[.

2. a) $f(x) = 2(3)^x - 5$ **b)** $f(x) = \log_2 x$ **c)** $f(x) = \log_{\frac{9}{4}}(x + 2)$

d) $f(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$ **e)** $f(x) = 1500\left(\frac{82}{75}\right)^{\frac{x}{2}}$ **f)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$

g) $f(x) = {}^-2(4)^x$ **h)** $f(x) = \log_{2\frac{1}{8}}(x - 1)$ **i)** $f(x) = {}^-2^x + 5$

Vue d'ensemble (*suite*)

3. a) $x \approx 13,64$ **b)** $x = 15$ **c)** $x \approx 1,62$ **d)** $x = 125\ 000$

e) $x \approx 0,20$ **f)** $x \approx 0,74$ **g)** $x = {}^-79$ **h)** $x \approx 0,85$

4. a) $x > 99\ 998$ **b)** $x > 7$ **c)** $x < 5,27$ **d)** $x \leq {}^-252$

e) $x > \approx 81\ 337,40$ **f)** $x \geq 3,42$ **g)** $x \leq 2$ **h)** $x \geq 10^{-7}$

5. a) $f^{-1}(x) = \log_{0,7}\frac{1}{3}(x - 2)$ **b)** $g^{-1}(x) = {}^-0,5\ln {}^-0,4x$ **c)** $h^{-1}(x) = 2^{\frac{x}{7}} - 9$

d) $i^{-1}(x) = {}^-\log_{0,05}\frac{2x}{3} + 4$ **e)** $j^{-1}(x) = 321e^{\frac{x}{455}}$ **f)** $k^{-1}(x) = 7(10)^{\frac{x}{3}}$

6. a) $x = 5$ **b)** $x = 2$ **c)** $x \approx -1,63$ **d)** $x \approx 3,61$

7. Oui. À un taux d'intérêt de 4 % dont les intérêts sont composés annuellement, la valeur du placement au bout de 20 ans est de $1600(1,04)^{20} \approx 3505,80$ \$, tandis que si les intérêts sont composés tous les 6 mois, le montant au bout de 20 ans est de $1600(1,02)^{40} \approx 3532,86$ \$.

8. Moment où le seuil critique est atteint : $5(1,5)^x = 5(1,5)^{14 - x}$

$$x = 14 - x$$
$$x = 7 \text{ ans}$$

La puissance associée au seuil critique est de $5(1,5)^7 \approx 85,43$ MW.

Vue d'ensemble (*suite*)

9. a) 1) $\approx 7401,22$ \$ **2)** $\approx 7429,74$ \$ **3)** $\approx 7456,83$ \$

b) Pour un même taux d'intérêt annuel, plus les intérêts sont composés souvent, plus la valeur du placement à l'échéance est élevée.

10. a) Environ 3,46 millions de visiteurs. **b)** 4 millions de visiteurs. **c)** Environ 4,95 millions de visiteurs.

11. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $y \approx 0,92(1,007)^x$

Vue d'ensemble (*suite*)

12. Dans environ 9,63 ans.

13. a) $Q = 1000(0,9)^t$ **b)** 190 L **c)** Environ 35,01 h après le début de l'ébullition. **d)** 25 L

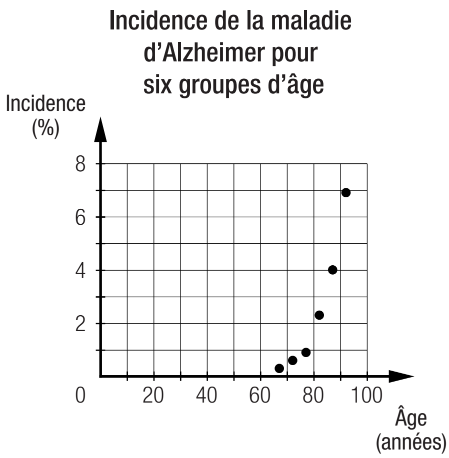
14. a) 1) 450 **2)** 10,7 **3)** 225

b) 1) $225 = 450e^{a10,7}$ **2)** $\approx {}^-0,06$ **3)** $M = 450e^{-0,0648t}$

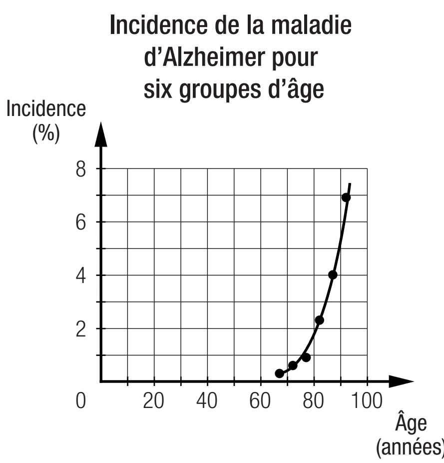
c) 1) $M = 5e^{-0,0001t}$ **2)** $M = 50e^{-0,0564t}$ **3)** $M = M_0e^{\frac{-t}{1\ 024\ 313\ 479}}$

Vue d'ensemble (*suite*)

15. a)



b) 1)



2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

$I = \frac{e^{0,1275a}}{16\,666,67}$, où I représente l'incidence et a, l'âge.

c) Une personne devrait être soumise à ces tests à partir de 76 ans.

16. a) La tige s'est dilatée de 2,54 mm environ.

b) La tige se dilate de 2 mm à 20 °C.

c) La dilatation de la tige est supérieure à 4 mm pour des températures supérieures à 2000 °C.

d) La dilatation maximale de la tige est environ de 3,35 mm.

Vue d'ensemble (*suite*)

17. Environ 1,81 min après la mise en marche.

18. a) $e^{-0,1 \times 5} \approx 60,65\,\%$

b)
$$\begin{aligned} 0,05C_0 &= C_0e^{-0,1t} \\ 0,05 &= e^{-0,1t} \\ -0,1t &= \ln 0,05 \\ t &\approx 29,96 \end{aligned}$$
L'eau doit rester dans le bassin environ 29,96 jours.

19. a) La tension de la pile 1 est décroissante, car la base, $e^{-1,2}$, est inférieure à 1.

b) 1) À 0 h. **2)** À 0,24 h environ (environ 14 min 23 s).

c) Il y a un risque d'incendie à partir de 0,58 h environ (environ 34 min 39 s).

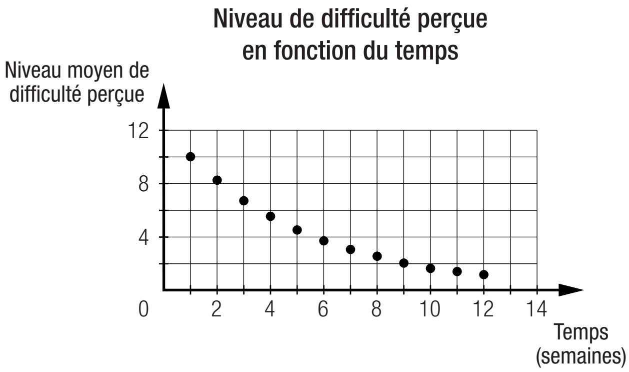
Vue d'ensemble (*suite*)

20. a) $250e^{0,7 \times 0} = 250$ pissenlits.

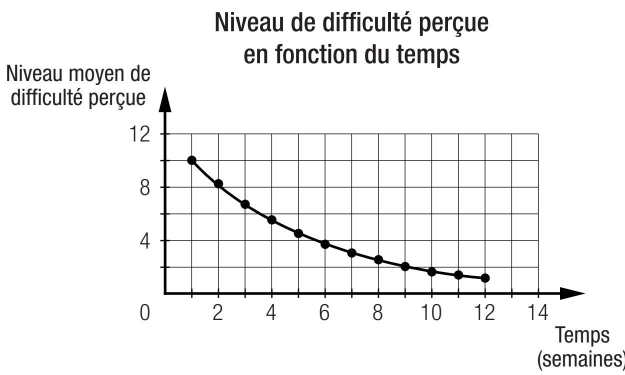
b) 1) $250e^{0,7 \times 1} \approx 503$ pissenlits. **2)** $250e^{0,7 \times 2} \approx 1014$ pissenlits. **3)** $250e^{0,7 \times 4} \approx 4111$ pissenlits.

c) $250e^{\frac{0,7}{7}} - 250 \approx 26$ pissenlits.

21. a)



b) 1)



2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*
$y \approx 12,34(0,82)^x$

c) 1) À ≈ 2,14 semaines. **2)** À ≈ 2,80 semaines. **3)** À ≈ 3,56 semaines. **4)** À ≈ 5,56 semaines.

Vue d'ensemble (*suite*) **Page 215**

22. a) Au début du processus de vieillissement, l'eau compte pour 30 % de la masse de ce fromage.
b) La quantité d'eau correspondra à 28 % de la masse de ce fromage dans environ 6,90 ans.

23. a) ≈ 99,37 kPa **b)** ≈ 793 m **c)** ≈ 137,38 K

Banque de problèmes **Page 216**

1. **Comparaison des sommes déboursées selon le mode de paiement**

Paiements P de 1500 $/mois	Paiements P de 1200 $/mois
Valeur *E* de l'emprunt : 200 000 $ Taux i d'intérêt mensuel : 6 % ÷ 12 = 0,5 % $200\,000 = 1500 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + 0,005}\right)^n}{0,005}$ $133,\overline{3} = \frac{1 - \left(\frac{200}{201}\right)^n}{0,005}$ $0,\overline{6} = 1 - \left(\frac{200}{201}\right)^n$ $\left(\frac{200}{201}\right)^n = 1 - 0,\overline{6}$ $\left(\frac{200}{201}\right)^n = 0,\overline{3}$ $n = \log_{\frac{200}{201}} 0,\overline{3}$ $n \approx 220,27$	Valeur *E* de l'emprunt : 200 000 $ Taux i d'intérêt mensuel : 6 % ÷ 12 = 0,5 % $200\,000 = 1200 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + 0,005}\right)^n}{0,005}$ $166,\overline{6} = \frac{1 - \left(\frac{200}{201}\right)^n}{0,005}$ $0,8\overline{3} = 1 - \left(\frac{200}{201}\right)^n$ $\left(\frac{200}{201}\right)^n = 1 - 0,8\overline{3}$ $\left(\frac{200}{201}\right)^n = 0,1\overline{6}$ $n = \log_{\frac{200}{201}} 0,1\overline{6}$ $n \approx 359,25$
Si la personne fait environ 220,27 paiements de 1500 $, la somme totale déboursée est d'environ 330 406,96 $.	Si la personne fait environ 359,25 paiements de 1200 $, la somme totale déboursée est d'environ 431 096,43 $.

Faire des paiements mensuels de 1500 $ plutôt que de 1200 $ permet de réaliser des économies d'environ 100 689,47 $.

2. Situation 1

Si la masse augmente de 30 % toutes les minutes, elle évolue selon la règle : $M = M_0(1,3)^x$, où M_0 représente la masse initiale et x représente le temps (en min).

La masse aura doublé lorsque $2M_0 = M_0(1,3)^x$. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} 2M_0 &= M_0(1,3)^x \\ 2 &= 1,3^x \\ x &= \log_{1,3}2 \\ x &\approx 2,64 \text{ min} \end{aligned}$$

Situation 2

Si la masse varie selon la règle $M = M_0e^{\frac{3t}{10}}$, où t représente le temps (en min), la masse aura doublé lorsque $2M_0 = M_0e^{\frac{3t}{10}}$. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} 2M_0 &= M_0e^{\frac{3t}{10}} \\ 2 &= e^{\frac{3t}{10}} \\ \frac{3t}{10} &= \ln 2 \\ \frac{3t}{10} &\approx 0,69 \\ 3t &\approx 6,93 \\ t &\approx 2,31 \text{ min} \end{aligned}$$

Situation 3

Si la masse augmente de 0,5 % de seconde en seconde, elle évolue selon la règle : $M = M_0(1,005)^{60x}$, où M_0 représente la masse initiale et x représente le temps (en min).

La masse aura doublé lorsque $2M_0 = M_0(1,005)^{60x}$. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} 2M_0 &= M_0(1,005)^{60x} \\ 2 &= 1,005^{60x} \\ 60x &= \log_{1,005}2 \\ 60x &\approx 138,98 \\ x &\approx 2,32 \text{ min} \end{aligned}$$

La masse de la substance double en premier dans la situation **2,** soit environ 0,01 min avant celle de la situation **3** et environ 0,33 min avant celle de la situation **1.**

3. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*

Le héros dit :

— Si les robots continuent à se reproduire de cette manière, leur population augmentera à un rythme exponentiel ! Actuellement, toutes les 30 h, le nombre N de robots double.
Cette situation peut être décrite par la règle $N = 2^{\frac{x}{30}}$, où x représente le temps (en h).
Le moment où la population de robots dépassera la moitié de celle des habitants de la planète correspond à l'inéquation $25\ 000\ 000\ 000 < 2^{\frac{x}{30}}$. Pour trouver ce moment, il faut résoudre l'équation $25\ 000\ 000\ 000 = 2^{\frac{x}{30}}$.

$$\begin{aligned} 25\ 000\ 000\ 000 &= 2^{\frac{x}{30}} \\ \frac{x}{30} &= \log_2 25\ 000\ 000\ 000 \\ \frac{x}{30} &\approx 34,54 \\ x &\approx 1036,24 \end{aligned}$$

La population de robots excédera la moitié de celle des habitants de la planète dans environ 1036,24 h, soit un peu plus de 43 jours !
Il faut absolument modifier le plan de fonctionnement de ces robots ! Si l'on fait en sorte qu'un robot se désactive de façon définitive immédiatement après en avoir construit un autre, la population de robots restera constante !

Banque de problèmes (*suite*) **Page 217**

4. • Déterminer la règle qui permet de calculer le nombre minimal de déplacements selon le nombre de disques.
Le nombre N minimal de déplacements selon le nombre n de disques correspond à $N = 2^n - 1$.

- Trouver l'équation à résoudre.
  Pour connaître le nombre de disques que compte la tour de départ sachant que le nombre minimal de déplacements nécessaires pour la reconstruire est 255, on doit résoudre l'équation $255 = 2^n - 1$.
- Résoudre l'équation.

$$\begin{aligned} 255 &= 2^n - 1 \\ 256 &= 2^n \\ n &= \log_2 256 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Si le nombre minimal de déplacements nécessaires pour la reconstruire est 255, alors la tour de départ compte 8 disques.

5. Il est certain que la pièce de bois se fend lorsque la probabilité qu'elle se fende est de 100 %, ou de 1. Pour déterminer le nombre de tours de serrage du boulon à partir duquel il est certain que la pièce de bois se fend, il faut résoudre l'équation $1 = 1{,}0416^t - 1$.

$$\begin{aligned} 1 &= 1{,}0416^t - 1 \\ 2 &= 1{,}0416^t \\ t &= \log_{1{,}0416} 2 \\ t &\approx 17 \end{aligned}$$

Il est certain que la pièce de bois se fend à partir de 17 tours.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 218

6. • La probabilité de trouver la combinaison au hasard si celle-ci comporte un seul chiffre est de $\frac{1}{10}$.

- La probabilité de trouver la combinaison au hasard si celle-ci comporte deux chiffres est de $\frac{1}{100}$:

$$\begin{pmatrix}\text{Probabilité de trouver}\\ \text{le 1}^{\text{er}}\text{ chiffre au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité de trouver}\\ \text{le 2}^{\text{e}}\text{ chiffre au hasard}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Probabilité de trouver}\\ \text{la combinaison au hasard}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

- La probabilité de trouver la combinaison au hasard si celle-ci comporte trois chiffres est de $\frac{1}{1000}$:

$$\begin{pmatrix}\text{Probabilité de trouver}\\ \text{le 1}^{\text{er}}\text{ chiffre au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité de trouver}\\ \text{le 2}^{\text{e}}\text{ chiffre au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité de trouver}\\ \text{le 3}^{\text{e}}\text{ chiffre au hasard}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Probabilité de trouver}\\ \text{la combinaison au hasard}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$$

- La probabilité de trouver la combinaison au hasard si celle-ci comporte quatre chiffres est de $\frac{1}{10\,000}$:

$$\begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{le 1}^{\text{er}}\text{ chiffre}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{le 2}^{\text{e}}\text{ chiffre}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{le 3}^{\text{e}}\text{ chiffre}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{le 4}^{\text{e}}\text{ chiffre}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{la combinaison}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix}$$

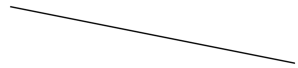
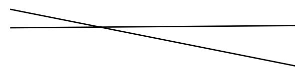
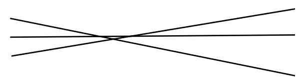
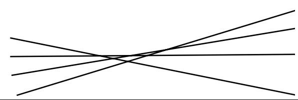
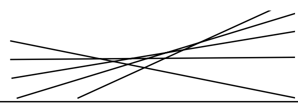
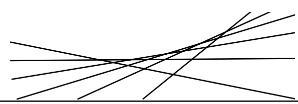
$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10\,000}$$

- La probabilité de trouver la combinaison au hasard si celle-ci comporte *n* chiffres est de $\left(\frac{1}{10}\right)^n$:

$$\begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{le 1}^{\text{er}}\text{ chiffre}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{le 2}^{\text{e}}\text{ chiffre}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{le 3}^{\text{e}}\text{ chiffre}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{le 4}^{\text{e}}\text{ chiffre}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix} \times \ldots = \begin{pmatrix}\text{Probabilité}\\ \text{de trouver}\\ \text{la combinaison}\\ \text{au hasard}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \ldots = \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

7.

Nombre de droites	Illustration	Nombre de points d'intersection
1		0
2		1
3		3
4		6
5		10
6		15
…	…	…
D		$\frac{D(D-1)}{2}$ ou $0{,}5D^2 - 0{,}5D$

Le nombre I de points d'intersection, selon le nombre D de droites tracées, ne varie pas selon une fonction exponentielle, mais selon une fonction polynomiale de degré 2.

8. Il faut résoudre le système d'équations associé à la situation où $P = C$. En résolvant à l'aide d'un tableau, on obtient :

Temps t (jours)	Population P (millions d'individus)	Capacité C du milieu (millions d'individus)
0	1	1
10	1,63	9,78
20	2,65	18,56
30	4,31	27,33
40	7,01	36,11
50	11,41	44,89
60	18,57	53,67
70	30,21	62,44
80	49,16	71,22
90	80	80

Cet événement se produira après 90 jours.

Banque de problèmes (*suite*)

9. Il s'agit d'isoler la variable P dans l'équation donnée.

$$\ln P = 38 - 5\ln v$$
$$P = e^{38 - 5\ln v}$$
$$P = \frac{e^{38}}{(e^{\ln v})^5}$$
$$P = \frac{e^{38}}{v^5}$$

10. Puisque pendant le traitement la population P (en %) de bactéries du système digestif d'un patient évolue selon la règle $P = 100(0,9)^t$ et que la durée du traitement est de 10 jours, la population de bactéries, à la fin du traitement, est environ de 34,87 %. La population sera revenue à son niveau normal lorsque $P = 100$. Il faut donc résoudre l'équation $100 = 34,87e^{0,14(t - 10)}$.

$$\begin{aligned} 100 &= 34,87e^{0,14(t - 10)} \\ 2,87 &= e^{0,14(t - 10)} \\ 0,14(t - 10) &= \ln 2,87 \\ 0,14(t - 10) &\approx 1,05 \\ (t - 10) &\approx 7,53 \\ t &\approx 17,53 \end{aligned}$$

La population bactérienne sera revenue à son niveau normal environ 17,53 jours après le début du traitement, c'est-à-dire environ 7,53 jours après la fin du traitement. La population bactérienne sera donc revenue à son niveau normal plus rapidement que ce qu'affirme cette médecin.